Úpravy výrazov na daný tvar

1. a) Ktoré z nasledujúcich výrazov nie sú druhou mocninou dvojčlena?
   $x^2+6x+6,\quad x^2+6x+9,\quad x^2+6x+10,\quad x^2+6x+36$
   b) Zmeňte v nich koeficient pri lineárnom člene tak, aby sa stali druhou mocninou dvojčlena.
   c) Zmeňte v trojčlenoch absolútny člen tak, aby sa stali druhou mocninou dvojčlena:
   $x^2+6x+36,\quad x^2+8x+64,\quad x^2-5x+121$
   d) Zmeňte v trojčlenoch koeficient pri kvadratickom člene tak, aby sa stali druhou mocninou dvojčlena: $x^2+16x+16,\quad x^2+8x+64,\quad x^2+8x+32$

2. Upravte nasledujúce výrazy na úplný štvorec:
   a) x^2+5x-8
   b) $x^2-\frac{1}{2}x+4$
   c) $x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{3}$
   d) $4x^2-2x+17$

3. Upravte na súčinový tvar:
   a) $\left(x^2+x+4\right)^2+8\cdot x\cdot\left(x^2+x+4\right)+15\cdot x^2$
   b) $\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2+x+2\right)-12$
   c) $\left(2x^2+3x-1\right)^2-5\cdot\left(2x^2+3x+3\right)+24$

4. Viete, že $a+b=9$ a $a\cdot b=\frac{1}{2}$. Zistite hodnotu výrazu a^2+b^2.

5. a) Vydeľte dva polynómy: $\left(12x^3+1\right):\left(2x-1\right)$ $\qquad\left(x^3+1\right):\left(x^2+1\right)$
   b) Nájdite čísla *a, b, c, d* tak, aby platilo: $\frac{x^3+1}{x^2+1}=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$
   c) Doplňte pravú stranu rovnosti analogickým spôsobom ako v úlohe b):
   $\frac{x^4-x^3+2}{x^2-3x+2}=\ldots.$ a úlohu vyriešte.

6. Zistite, aké čísla/výrazy treba doplniť namiesto *A, B, C* a a,b,c,d :
   a) $\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$
   b) $\frac{4x-2}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$

c) $\dfrac{10x^2-8x-6}{x^3-x^2-6x}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{x}$

d) $\dfrac{3x+6}{x^2+4x-32}=\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{cx+d}$

7. Upravte dané výrazy:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}$

e) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{3+2\sqrt{3}+4}}{\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$

*8. Zjednodušte aspoň tromi rôznymi spôsobmi zlomok: $\dfrac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x^1+1}$

*9. Rozložte na súčin aspoň tromi rôznymi spôsobmi:

a) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ b) $x^3+y^3+z^3$

*10. Nájdi racionálne čísla *a, b, c, d* tak, aby $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$

*11. Kedy možno výraz $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, kde *a, b* sú prirodzené čísla, písať v tvare $\sqrt{c}\pm\sqrt{d}$, kde *c, d* sú racionálne čísla?

Logika 1

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú a ktoré nie sú výrokmi:
   a. Vonku práve sneží.
   b. Poďme všetci von.
   c. 81:9 = 7
   d. Táto veta je pravdivá.
   e. Čo je riešením rovnice $x-8=27$?
   f. Každý násobok čísla 5 je nepárny.
   g. Rozdiel množín A – B je tá istá množina ako rozdiel B – A.

2. Zapíšte nasledujúce vety symbolicky:
   a. V reálnych číslach nemá rovnica $x^2=-1$ riešenie.
   b. Pre každé x väčšie ako nula a menšie ako jedna je x^2 menšie ako x.
   c. Rovnica $x^2=4$ má v obore reálnych čísel aspoň 1 riešenie.
   d. Keď ľubovoľné reálne číslo vydelíme sebou samým, podielom bude číslo jedna.
   e. Pre každé x z definičného oboru funkcie f existuje práve jedno reálne číslo y také, že y sa rovná funkčnej hodnote x.
   f. Ak má rovnica $f(x)=0$ celočíselné riešenie, potom aj rovnica $f^2(x)+f(x)=0$ je riešiteľná v množine Z.

3. Znegujte uvedené výroky:
   a. Číslo 12 je násobkom čísla 4.
   b. Aspoň jeden trojuholník má všetky strany rovnako dlhé.
   c. Každý násobok čísla 5 je nepárny.
   d. V krúžku nosia okuliare práve dvaja študenti.
   e. Dnes chýbajú aspoň 3 študenti.
   f. Kvadratická rovnica nemá koreň, alebo má dva korene.
   g. Ak sa dá trojuholník zostrojiť, tak má úloha dve riešenia.
   h. Pomaranče kúpim len vtedy, keď nebudú citróny.
   i. $\forall x\in Z: x=2k \vee x=2k+1; k\in Z$
   j. $\forall a,b\in R: [(a>0)\wedge(b>0)] \Rightarrow (ab>0)$

4. Z daných výrokov A, B vytvorte implikáciu $A \Rightarrow B$, obrátenú implikáciu, obmenenú implikáciu a negáciu implikácie.
   a. A: číslo 17 je nepárne, B: číslo 6 je násobkom čísla 2
   b. A: 8 delí 20, B: všetky prvočísla sú nepárne
   c. A: nulou sa nedá deliť, B: súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°
   d. A: $-6>0$ B: $2^3=8$
   e. A: $\log x>0$, B: $x>1$
   f. A: $\cos x+\sin x=1$, B: $\cos x.\sin x\neq 0$

5. Posúďte Marcelkine negácie výrokov a nesprávne opravte:

A:	Dnes mám dobrú náladu.	A':	Dnes mám zlú náladu.
B:	Fero má doma chladničku alebo bicykel.	B':	Fero nemá doma chladničku, ale má bicykel.
C:	Grahamové rožky sú dobré práve vtedy, keď sú čerstvé.	C':	Grahamové rožky nie sú nikdy dobré.
D:	Ak ma dnes večer bude bolieť hlava, nepôjdem zajtra do školy.	D':	Dnes večer ma nebude bolieť hlava a zajtra pôjdem do školy.
E:	Eva má hnedé oči a blond vlasy.	E':	Eva má zelené oči a hnedé vlasy.

6. Doplňte niektoré zo slovných spojení „je nutné“, alebo „stačí“ tak, aby nasledujúce výroky boli pravdivé:
   a. Aby súčin dvoch čísel bol rovný nule ... aby aspoň jeden z činiteľov bol rovný nule
   b. Aby celé číslo bolo deliteľné piatimi, ... aby končilo cifrou 5.
   c. Aby dva ostré uhly boli zhodné,... aby ich ramená boli rovnobežné.

7. Zuzka, Julo a Aďo oznámili svojim študentom podmienky na udelenie zápočtu. Zuzka povedala:“ Ak nenapíšete zápočtovú písomku na viac ako 75 %, nedostanete zápočet. Julova podmienka:“ Ak napíšete zápočtovú písomku na viac ako 75 %, dostanete zápočet. Aďo zahlásil: “Zápočet dostanete práve vtedy, keď napíšete zápočtovú písomku na viac ako 75 %. Ktorá z týchto podmienok je pre študentov najvýhodnejšia?

8. Tabuľkovou metódou overte, či sú nasledujúce výroky tautológie a prepíšte ich do prirodzeného jazyka:
   d. $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
   e. $(A \Rightarrow B)' \Rightarrow C'$
   f. $[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \Rightarrow C]$
   g. $(P \Leftrightarrow S) \Leftrightarrow [(P \wedge S) \vee (P \wedge S)]$
   h. $[(P \wedge Q) \Rightarrow R]' \Leftrightarrow [(P' \vee Q') \wedge R']$

9*. Majme logickú spojku | definovanú takto : výrok p|q znamená, že p a q nie sú oba pravdivé. Vyjadrite ostatné spojky (alebo, ...) pomocou spojky |.

10*. Znegujte tento výrok: $\exists a \forall b \exists c \forall d : ab = cd \Rightarrow ac = 0$

Dôkazy, Matematická indukcia

1. Evička mala na písomke napísať dôkaz Pytagorovej vety a dôkaz Euklidovej vety o odvesnách. Postupovala nasledovne:
   (1) Dokážem najprv Pytagorovu vetu. Podľa Euklidovej vety o odvesnách platí:
   $a^2 = c.c_a$, $b^2 = c.c_b$,
   (2) teda $a^2 + b^2 = c.c_a + c.c_b = c(c_a + c_b) = c^2$, čo som chcela ukázať.
   (3) Teraz ešte dôkaz Euklidovej vety o odvesnách, $a^2 = c.c_a$, resp. $b^2 = c.c_b$. Vieme, že platí Pytagorova veta: $a^2 + b^2 = c^2$, teda $a^2 = c^2 - b^2$.
   (4) Aby sme dokončili dôkaz, stačí ukázať, že platí: $c^2 - b^2 = c.c_a$. Upravujme:
   $c^2 - c.c_a = b^2, c.(c - c_a) = b^2$. Ale $c - c_a = c_b$, a tak po dosadení dostávame
   (5) $c.c_b = b^2$. Hotovo!

   Ako by ste ohodnotili jej riešenie?

2. Dokážte pre $a, b \in N$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. Dokážte, že:
   a) pre všetky α pre ktoré sú $tg\alpha$ aj $\cot g\alpha$ kladné, platí nerovnosť:
   $tg\alpha + \cot g \geq 2$.
   b) pre všetky čísla $a, b > 1$ platí: $\log_a b + \log_b a \geq 2$.
   c) $\forall p \in N : 3 / p^2 \Rightarrow 3 / p$.
   d) číslo $\sqrt{7}$ je iracionálne číslo
   e) ak pre racionálne čísla a, b je $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ racionálne číslo, potom $\sqrt{a}$ aj $\sqrt{b}$ sú racionálne čísla.

4. Doplňte chýbajúce časti dôkazu tvrdenia: „Prirodzené číslo má práve tri delitele vtedy a len vtedy, keď je druhou mocninou nejakého prvočísla."

   Dôkaz: Tvrdenie má tvar ekvivalencie, preto...........................
   1. Ak je číslo druhou mocninou prvočísla (p^2), potom jeho delitele sú len ..., ... a ... . Teda skutočne má práve tri delitele.
   2. Každé číslo n (okrem čísla ...) má aspoň dva delitele: ... a ... Ku každému deliteľu $k(\neq 1, n)$ čísla n, existuje ďalší deliteľ $\frac{n}{k}$. Ak má teda mať číslo práve tri delitele, musí byť ... rovné ..., teda $n =$ ... . Aby už nemalo číslo n iné delitele, musí byť číslo k ....
   Tým je dôkaz skončený.

5. Matematickou indukciou dokážte, že $\forall n \in N$ platí:

   a) $1+2+3+4+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ b) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

   c) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. a) Dokážte, že v každom konvexnom $n-$uholníku je súčet jeho vnútorných uhlov $(n-2).180^\circ$.

   b) Platí toto tvrdenie aj pre nekonvexné mnohouholníky?

7. Fero tvrdí, že 73 delí súčet $2^{3n}+3^{4n}$. Tu je jeho dôkaz: $2^{3(n+1)}+3^{4(n+1)}=8.2^{3n}+3^4.3^{4n}=8.2^{3n}+8.3^{4n}+73.3^{4n}=8\left(2^{3n}+3^{4n}\right)+73.3^{4n}$, prvý sčítanec je deliteľný 73, teda celé číslo je deliteľné 73.
   Vojto tvrdí, že 73 nedelí súčet $2^{3n}+3^{4n}$, lebo $2^{3(n+1)}+3^{4(n+1)}=8\left(2^{3n}+3^{4n}\right)+73.3^{4n}$ prvý sčítanec nie je deliteľný číslom 73 a teda ani celé číslo nemôže byť deliteľné 73.
   Kto má pravdu?

*8. Dokážte matematickou indukciou: $\forall n \in N: \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{2^n}\geq\dfrac{n}{2}$

*9. Dokážte, že n kruhov (s rovnakými polomermi) sa dá ofarbiť tromi farbami tak, že žiadne dva dotýkajúce sa nie sú rovnakej farby.

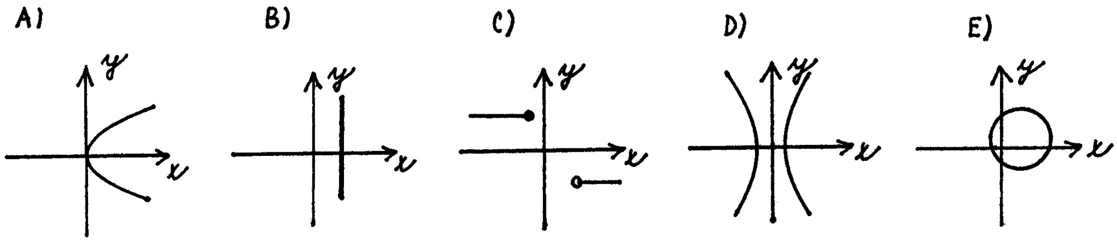
*10. Dokážte, že ak $a,b,c \in R$ sú čísla, pre ktoré platí $a+b+c=0$, potom

   $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}=-3$

Funkcie

1. Ktoré z nasledujúcich závislostí sú funkčné?
   a) závislosť ceny za doručenie "obyčajného" balíka v rámci SR od jeho hmotnosti
   (Zmenila by sa situácia, keby sme vynechali slovo obyčajný?)
   b) číslo topánok v závislosti od výšky človeka
   c) obvod pása Aničky Reďkovkovej v závislosti na ročnom období
   d) plošná veľkosť plešiny Jožka Mrkvičku v závislosti od jeho veku

2. a) Ktoré z nasledujúcich čiar nemôžu byť grafom žiadnej funkcie?

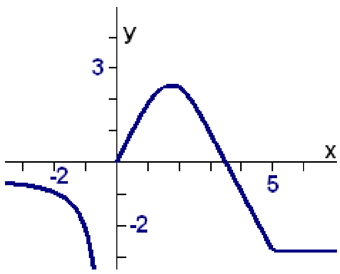


   b) Ak sa dá, zvoľte súradnicové osi tak, aby nimi v novej súradnicovej sústave mohli byť.

3. Dve z hrán kvádra merajú 7 cm a 15 cm. Vyjadrite závislosť
   a) veľkosti povrchu tohto kvádra na dĺžke jeho tretej hrany.
   b) dĺžky tretej hrany kvádra od veľkosti jeho povrchu.
   c) Určte definičný obor a obor hodnôt oboch funkcií.

4. Určte definičný obor a obor hodnôt funkcií
   $a: y = 6$ $\quad$ $b: y = x^2 - 6x + 3$
   $c: y = -\dfrac{x+3}{x+1}$ $\quad$ $d: y = \sqrt{3 - x^2}$

5. V danom obrázku
   a) znázornite na osi y množinu
   $\{f(x),\ x$ je z intervalu $\langle -1, 2)\}$
   b) znázornite na osi x množinu
   $\{x,\ f(x)$ je z intervalu $(-\infty, -2\rangle\}$.



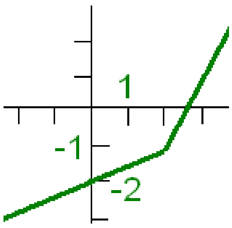
6. Nájdite spoločné body grafov funkcií f a g.
   a) f: $y = 5x^2 - 4x - 1$ $\quad$ g: $y = -6x + 6$
   b) f: $y = x + 3$ $\quad$ g: $y = \dfrac{6}{x+2}$

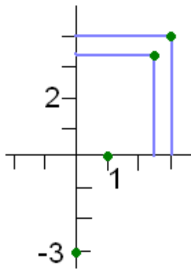
7. Načrtnite grafy funkcií:
   a) $f: y = 2x^2 + 8x + 6$ $\quad$ b) $k: y = 4x^2 + 4x - 3$
   c) $g: y = 4x^2 + 4x + 1$ $\quad$ d) $h: y = 4x^2 + 4x + 5$

8. Načrtnite grafy funkcií:
   a) $y = x^n$ pre $n = 1,2,3,12,13,-1,-2,-7,-8$
   b) $y = x^2 - 4$, $y = -x^2$, $y = (x-5)^2$, $y = (5-x)^2$
   c) $y = \dfrac{1}{x+4}$, $y = \dfrac{1}{2x}$, $y = \dfrac{1}{x} + 3$
   d) $y = |x|$, $y = |x+3|$, $y = |x| - 1$, $y = -2|x|$

9. Grafy funkcií *f* a *g* majú jediný spoločný bod [-1,2]. Zistite spoločné body grafov funkcií
   a) $f_1 : y = f(x+2)$ a $g_1 : y = g(x+2)$ b) $f_2 : y = 3f(x)+1$ a $g_2 : y = 3g(x)+1$
   c) $f_3 : y = f(-x)$ a $g_3 : y = g(-x)$ d) $f_4 : y = f^3(x)$ a $g_4 : y = g^3(x)$

*10. Určte funkciu $f(x) = ax + b + c|x+d|$, ak poznáte
   a) jej graf, b) 4 body jej grafu.





*11. Načrtnite grafy funkcií
   a) *f*: *y* = [*x*], *g*: *y* = *x* zaokrúhlené na jednotky, *h*: *y* = *x* bez desatinnej časti,
   b) *f*: *y* = [2*x* + 3,4], *g*: *y* = (2*x* + 3,4) zaokrúhlené na jednotky, *h*: *y* = (2*x* + 3,4) bez desatinnej časti.

*12. Nakreslite aspoň jednu nekonštantnú funkciu f s vlastnosťou
   a) f(x-2) = f(-x) b) f(x+1) - f(x) = 3x+5.

*13. Pomocou absolútnej hodnoty nájdite jednotný predpis pre funkcie
   a) $y = x$, ak $x \le 0$, $y = 3x$ ak $x > 0$
   b) $y = 3x$, ak $x \le 0$, $y = x$ ak $x > 0$
   c) $y = x+2$, ak $x \le 1$, $y = 3x$ ak $x > 1$

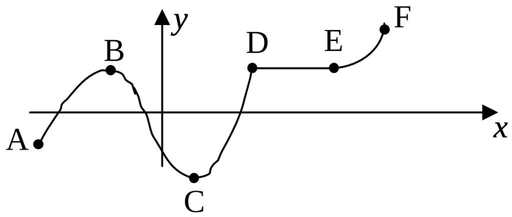
*14. Nájdite také 3 body s celočíselnými súradnicami, aby kvadratická funkcia aj lineárna lomená funkcia určená týmito 3 bodmi mali celočíselné, nenulové celočíselné koeficienty.

Vlastnosti funkcií

1. V nasledujúcich definíciách sú chyby. Pokúste sa ich opraviť, ak sa dá, tak viacerými spôsobmi.
   a) Hovoríme, že funkcia f je rastúca na množine $M \subseteq D_f$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in M$ je $f(x_1) < f(x_2)$
   b) Hovoríme, že funkcia f je klesajúca na množine $M \subseteq D_f$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$ platí:
   $$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$
   c) Hovoríme, že funkcia f je rastúca na množine $M \subseteq D_f$, ak pre žiadne $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ nie je funkčná hodnota v bode x_1 väčšia ako funkčná hodnota v bode x_2.

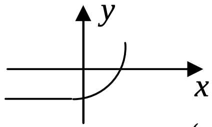
2. Nájdite všetky $a \in R$, pre ktoré je funkcia f na množine M rastúca.
   a) $f : y = ax + 3$, $M = R$ b) $f : y = 2x + a$, $M = (-4, -1\rangle$
   c) $f : y = \dfrac{1}{x - a}$, $M = \langle -1, 2\rangle$ d) $f : y = 4x^2 + ax + 10$, $M = \langle 2, 8\rangle$
   e) $f : y = x^3 + 3x^2 + ax + 11$, $M = R$

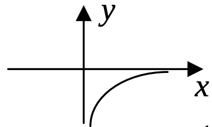
3. Určte a) lokálne b) globálne extrémy funkcie, ktorej graf vidíte na obrázku.

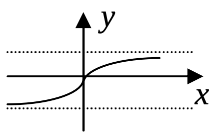


4. Zistite, či je funkcia $g : y = \left(3.\sqrt{\dfrac{1}{x} + 2}\right)^3$ monotónna na R^+.

5. Pre ktoré z nasledujúcich funkcií existuje také reálne číslo, že žiadna z funkčných hodnôt nie je menšia ako toto číslo? Ako voláme funkcie s touto vlastnosťou?

a:


b:


c:


d: $y = 2 - 3x$, $x \in (-\infty, 1)$ e: $y = x^{11} + x^{111}$

6. Namiesto a doplňte také číslo, aby funkcia f bola zhora ohraničená.

   a) $f: y = 4 - ax^2$ b) $f: y = \dfrac{a}{x^2}$ c) $f: y = x^2 + ax^4$

7. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia:
   „Najmenšie lokálne minimum je globálnym minimom danej funkcie“

8. Nakreslite graf aspoň jednej funkcie f, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

   a) je rastúca na intervale $(-3,1)$,

   b) je klesajúca iba na intervale $\langle 2,5 \rangle$,

   c) jej definičným oborom je interval $(-3,7)$,

   d) je prostá na celom svojom definičnom obore.

   Nakreslite aj graf funkcie inverznej k funkcii f.

*9. Rozhodni o pravdivosti tvrdení

   a) Ak f je nerastúca na $\langle a,b \rangle$ aj na $\langle b,c \rangle$, potom je nerastúca na $\langle a,c \rangle$.

   b) Ak f je nerastúca na $\langle a,b)$ aj na $\langle b,c \rangle$, potom je nerastúca na $\langle a,c \rangle$.

   c) Ak f je nerastúca na $\langle a,b)$ aj na $(b,c \rangle$, potom je nerastúca na $\langle a,b) \cup (b,c \rangle$.

*10. Zistite SŠ spôsobom, pre aké a,b,c,d je funkcia $f: y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ monotónna.

Teória čísel I

1. Ubu si kúpil niekoľko pohárov veľkého džúsu po 5 dl, Mua si kúpila len malé džúsy po 3 dl. Veľký džús stojí 12 dukátov, malý 8 dukátov.
   a)Obaja si kúpili rovnaké množstvo džúsu. Koľko pohárov džúsu si kúpil Ubu a koľko Mua? Kto z nich kupoval cenovo výhodnejšie?
   b)Obaja platili rovnako. Koľko pohárov džúsu si kúpil Ubu a koľko Mua? Kto z nich si kúpil viac džúsu?

2. Športovci na štadióne mohli nastúpiť do dvojstupov, trojstupov, štvorstupov, päťstupov, šesťstupov alebo osemstupov a ani v jednom prípade nik nezvýšil. Prezradíme vám, že ich bolo menej ako 200. Určte ich počet.

3. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:
   a) Číslo je deliteľné 24 práve vtedy, keď je deliteľné 4 aj 6.
   b) Číslo je deliteľné 105 práve vtedy, keď je deliteľné 15 aj 35.
   c) Ak sú dve čísla deliteľné 6, tak aj ich rozdiel je deliteľný 6.
   d) Ak ani jedno z dvoch čísel nie je deliteľné 6, tak ani ich rozdiel nie je deliteľný 6.
   e) Ak je číslo deliteľné 15 aj 21, tak je deliteľné aj $15 \cdot 21 = 315$
   f) Ak je číslo deliteľné 1001, tak je deliteľné 13.

4. Obdĺžnik s dĺžkami strán 90 cm a 117 cm rozdeľte na
   a) čo najväčšie rovnaké štvorce
   b) na čo najväčší počet štvorcov
   Akú dĺžku strany budú mať tieto štvorce? Na koľko štvorcov bude obdĺžnik rozdelený?

5. Písací blok má rozmery 15 cm x 21 cm a obsahuje 100 listov papiera. Môžem z listov tohto bloku pokryť nejaký štvorec? Aký veľký? Koľko listov spotrebujem?

6. Koľko riešení má rovnica $x \cdot y = 12$ s dvoma neznámymi v
   a) prirodzených
   b) celých
   c) racionálnych číslach?

7. Riešte v celých číslach:
   a) $a \cdot b = 77$
   b) $a - ab = 16$
   c) $s^3 \cdot t = 6912$
   d) $a^2 + 6 = 5ab$

8. Riešte rovnice s neznámymi $x \in N$, $y \in N$:
   a) $4x = 5y$
   b) $4x = 6y$
   c) $30x = 85y$

9. Určte všetky dvojice *s*, *t*, ktorých najmenší spoločný násobok je 72 a
   a) *NSD(s, t)* = 36
   b) *NSD(s, t)* = 9

c) $NSD(s, t) = 1$

10*. a) Nájdite všetky prvočísla, ktoré je možné zapísať ako súčet aj rozdiel dvoch prvočísel.

b) Dokážte, že rovnica $x^2 - y^3 = 7$ nemá v celých číslach riešenie.

c) Riešte v Z: $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Rovnice, ekvivalentné a neekvivalentné úpravy

1. Sú uvedené rovnice ekvivalentné?

   a) $\frac{x-2}{x-2}=1$ a $1=1$

   b) $\frac{x-3}{x^2-x-6}=0$ a $\frac{1}{x+2}=0$

2. Doplňte namiesto chýbajúce číslo tak, aby rovnica nemala v R riešenie.

   a) $.x+7=2.(5+x)$ b) $\frac{x-1}{x-}=x-1$ c) $\frac{x+1}{.x+2}=2$

3. Posúďte nasledujúce riešenia.

   a) $x+x\sqrt{2}=1$

   $x\sqrt{2}=1-x$

   $2x^2=1-2x+x^2$

   $x^2+2x-1=0$

   $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$

   b) $|2x+1|=|x-2|$

   $4x^2+4x+1=x^2-4x+4$

   $3x^2+8x-3=0$

   $x_1=-3,\ x_2=\frac{1}{3}$

   c) $\frac{x+\sqrt{6}}{x\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=2$

   $x+\sqrt{6}=2x\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

   $\sqrt{6}-4\sqrt{3}=(2\sqrt{2}-1).x$

   $x=\frac{\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}$

4. Riešte v *R*:

   a) $x^2-3x=0$ b) $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ c) $\sqrt{x}=-3$ d) $\frac{x.(x-1)}{x-1}=1$

   e) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ f) $\sqrt{-x}=3$ g) $\frac{x}{x+2}=100$ h) $\frac{x^2-25}{x-5}=x+5$

   i) $|x+2|=-4$ j) $\left(x^4+9\right)x=2x^2\left(x^4+9\right)$

5. Doplňte do čitateľa ľubovoľný lineárny výraz tak, aby množina riešení rovnice

   a) $\frac{}{x+4}=2$ boli všetky reálne čísla,

   b) $\frac{}{x^2+x-12}=0$ bola prázdna.

6. Pre aké $p \in R$ má rovnica $\dfrac{2x^2}{2x-3} = \dfrac{p.x}{2x-3}$ len jedno riešenie?

7. Napíšte takú kvadratickú rovnicu s celočíselnými koeficientmi, ktorá:
   a) nemá v *R* koreň
   b) má 1 racionálny koreň a žiaden iný
   c) má 1 iracionálny koreň a žiaden iný
   d) má dva rôzne racionálne korene
   e) má dva rôzne iracionálne korene
   f) má 1 racionálny a 1 iracionálny koreň

8. Napíšte ľubovoľný mnohočlen a) tretieho b) štvrtého c) piateho
   d) šiesteho stupňa, ktorý bude mať takúto množinu koreňov: $K = \left\{-1, \dfrac{3}{4}, \sqrt{3}, 2\right\}$

*9. Riešte v *R*:

$$\text{a)}\ \frac{x+51}{99} + \frac{x+53}{97} + \frac{x+55}{95} = \frac{x+49}{101} + \frac{x+47}{103} + \frac{x+45}{105}$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+1} = -3$$

*10. Riešte v *R*:

$$\text{a)}\ \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{b)}\ \sqrt{x-3} + \sqrt{x^2-9} = \sqrt{x+1}.\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{c)}\ \sqrt{x+17} - \sqrt{x+1} = 4$$

*11. Profesor X tvrdí, že ak $(x-3)^2(x+4) + (x-3)^3(x-8) = 2$, potom $(x-2)^4 = 1$.
Profesor Y tvrdí, že ak $\sqrt{x+13} = \dfrac{36}{x} + 6$, potom aj $13 - \sqrt{x} = \dfrac{36}{x} + 6$. Majú profesori pravdu?

Sústavy rovníc I

1. K nasledujúcim sústavám rovníc pridajte jednu rovnicu tak, aby sa množina riešení nezmenila.

   a) $2x + 5y = 8$
   $7x - 4y = -3$

   b) $x + 2y - 2z = 3$
   $-2x + y + 2z = 3$
   $-x + 3y + z = 7$

2. V sústave rovníc $2x - 3y = 1,\ 2x + 3y = -1$ zmeňte najmenší možný počet koeficientov tak, aby
   a) nová sústava mala v $R \times R$ práve jedno riešenie
   b) nová sústava mala v $R \times R$ nekonečne veľa riešení
   c) nová sústava nemala v $R \times R$ riešenie
   d) riešením novej sústavy boli práve dve usporiadané dvojice $[x, y] \in R \times R$.
   e) K sústavám rovníc z predchádzajúcej úlohy pridajte jednu rovnicu tak, aby množina riešení novej sústavy bola prázdna.

3. Pre ktoré $a, b \in R$ má sústava
   $$ax + by = 1$$
   $$2bx + ay = -1$$
   riešenie:
   a) $\{[5, -7]\}$ b) $\{\ \}$ c) $\left\{\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right], k \in R - \{0\}\right\}$?

4. a) Dana, Oľga, Ľubo a Petra mali za domácu úlohu pozmeniť niektoré koeficienty v sústave rovníc $x + y = 3$ a $2x + 3y = 8$ tak, aby riešením novej sústavy bola usporiadaná dvojica $[3,6]$.
   Dana jednoducho „dosadila“: $x + y = 3 + 6$ a $2x + 3y = 2.3 + 3.6$
   Oľga najskôr vyriešila pôvodnú sústavu rovníc a potom navrhla každú z rovníc vynásobiť číslom 3.
   Ľubo násobil 3 iba ľavé strany oboch rovníc, Petra zasa iba ich pravé strany.
   Odkiaľ asi pochádza tá „magická“ trojka? Ktorý zo študentov dospeje k požadovanej sústave?

   b) Zmeňte pravú stranu sústavy rovníc z predchádzajúcej úlohy tak, aby čísla x a y vyhovujúce pozmenenej sústave rovníc boli o 2 menšie ako x a y vyhovujúce pôvodnej sústave rovníc.

5. Pozmeňte pravú stranu sústavy rovníc tak, aby čísla x a y vyhovujúce novej sústave boli dvakrát väčšie, ako x a y vyhovujúce pôvodnej sústave rovníc.
   $$\frac{x-1}{2} + y = -2 \qquad 3x - \frac{y+1}{3} = 16$$

6. Janko a Marienka mali zistiť, pre aké s a t majú sústavy rovníc

$$\begin{aligned} 4x-7y&=s \\ 3x+5y&=4 \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} 5x+2y&=13 \\ 3x-4y&=t \end{aligned}$$

rovnaké riešenie.
Janko si z oboch sústav vyjadril x aj y pomocou parametrov a potom ich vzájomne porovnal. Získal tak novú sústavu rovníc s neznámymi s a t, ktorú vyriešil.
Marienka najprv vyriešila sústavu rovníc $3x+5y=4,\ 5x+2y=13$ a potom už ľahko vypočítala s aj t.
Posúďte dané riešenia a úlohu vyriešte (ak je niektoré riešenie správne, môžete ho dokončiť).

7. a) Určte súradnice priesečníkov grafov funkcií $f: y=2x+7$ a $g: y=5x+10$
b) Nájdite súradnice priesečníka priamok, ktoré sú dané rovnicami
$2x-y-3=0,\ 2(x-3)-y=0$.
Úlohy riešte graficky aj výpočtom.

8. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:
a) Ak $5x+2y=5$ a $y-2x=16$, tak $x+4y=37$
b) Ak $-8x+7y=15$ a $6x+13y=7$, tak $5x+4y=7$

*9. Pre ktoré $a\in R$ sa jedna zo zložiek usporiadanej trojice $[x,y,z]$, ktorá je riešením nasledujúcej sústavy, rovná 0?

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z&=a \\ 4x-y+2z&=a-6 \\ 7x-2y+4z&=a-10 \end{aligned}$$

*10. Dvaja hráči striedavo dopĺňajú namiesto hviezdičiek čísla. Začínajúci vyhrá vtedy, ak má sústava rovníc, ktorá takto vznikne, nenulové riešenie. V opačnom prípade vyhrá protihráč.

Objavte vyhrávajúcu stratégiu pre prvého z hráčov.

$$\begin{aligned} *.x+*.y+*.z&=0 \\ *.x+*.y+*.z&=0 \\ *.x+*.y+*.z&=0 \end{aligned}$$

*11. Vrcholy pravidelného štvorstena sú namiesto písmen označené číslami tak, že súčty čísel vrcholov sú pre jednotlivé steny 10, 20, 40 a 80. Zistite, akými číslami sú označené vrcholy.

*12. Na policajnú stanicu v meste prišlo nové nariadenie. Nočné hliadky by mali byť trojčlenné a mali by mať hmotnosť aspoň 240 kg. Náčelník nechal nastúpiť všetkých „hliadkujúcich“ policajtov do kruhu a nechal odvážiť postupne každú trojicu vedľa seba stojacich. Zistil takéto hmotnosti: 238, 236, 247, 242, 244 a 233. Dá sa táto skupina policajtov rozdeliť na dve hliadky tak, aby bolo splnené nové nariadenie? Ako?

*13. V množine reálnych čísel riešte sústavy rovníc:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 &= -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 &= -6 \\ x_7 + x_8 + x_1 &= -2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} b + c + d &= 5 \\ a + c + d &= 0 \\ a + b + d &= 8 \\ a + b + c &= 4 \end{aligned}$$

*15. Vyriešte šikovne sústavy rovníc:

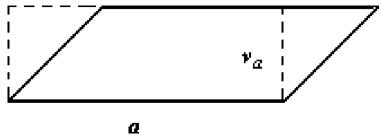
a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \frac{25}{12} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} &= 12 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

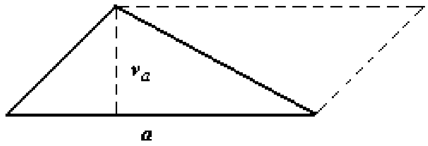
c)
$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 &= 19 \\ x_1 - x_1 x_2 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

Geometria I

1. a) Týmto obrázkom vás chcel Fero presvedčiť o platnosti vzorca na výpočet obsahu rovnobežníka. Podarilo sa mu to?



   b) Čo asi chcel Fero povedať týmto obrázkom?



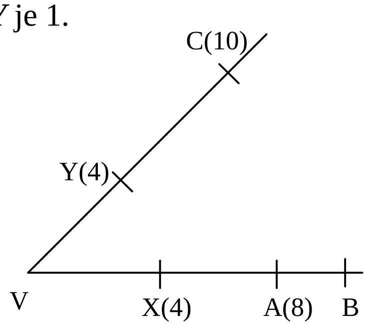
   c) Vymyslite obrázok, ktorý by „odôvodnil“ platnosť vzorca pre výpočet obsahu lichobežníka.

2. a) Fero si myslí, že ak je trojuholník so stranami *a*, *b*, *c* pravouhlý, tak každý trojuholník, ktorého dĺžky strán sú rovnakými nenulovými násobkami strán *a*, *b*, *c*, je tiež pravouhlý. Má pravdu?
   b)Janka tvrdí, že každé dva pravouhlé trojuholníky sú podobné. Je to pravda?

3. Ktoré z uvedených trojíc čísel vyjadrujú dĺžky strán pravouhlých trojuholníkov?
   a) 2, 5, 3
   b) $\sqrt{7}$, 3, 4
   c) 1, $\sqrt{7}$, 7
   d) 2, 5, $\sqrt{10}$
   d) 3, $\sqrt{10}$, 1
   e) 1, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$

4. Rovnoramenný trojuholník, ktorého ramená merajú 8 cm, budeme volať „osmičkový“.
   a) Fero tvrdí, že čím väčší je uhol protiľahlý k základni osmičkového trojuholníka, tým väčší je obsah trojuholníka. Má pravdu?
   b) V osmičkovom trojuholníku má uhol protiľahlý k základni veľkosť 30°. Koľkokrát by sa musel zväčšiť, aby sa obsah trojuholníka zväčšil dvojnásobne?
   c) Existujú dva nezhodné osmičkové trojuholníky s rovnakým obsahom?

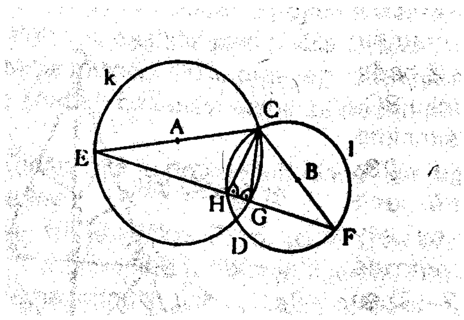
5. Na ramenách uhla *XVY* je vyznačených niekoľko bodov, čísla pri nich vždy udávajú ich vzdialenosť od bodu *V*. Vypočítajte |*AB*|, ak viete, že obsah trojuholníka *ABC* je 2 a obsah trojuholníka *VXY* je 1.



6. V trojuholníku *ABC* sú body *X, Y* po rade päty výšok na strany *a*, *b*. Vypočítajte polomer kružnice opísanej trojuholníku *AXY*, ak platí $\alpha = 37°$, $\beta = 76°$, $c = 12{,}6$.

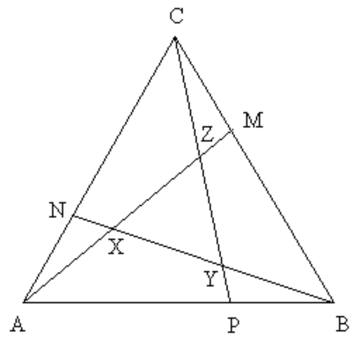
7. Obsahy obdĺžnikov *ABCD*, *KLMN*, *XYZW* a *OPQR* sú po poradí 7 cm^2, 10 cm^2, 19 cm^2 a 40 cm^2. Zostrojte štvorce s rovnakými obsahmi ako sú obsahy uvedených obdĺžnikov.

8. Fero „vymyslel" trojuholník s dvoma pravými uhlami: Narysoval si kružnice *k* a *l* so stredmi *A*, *B*, ktoré sa pretínajú v bodoch *C* a *D*. Priesečníky polpriamok *CA* s *k* a *CB* s *l* označil *E*, *F*. Narysoval úsečku *EF* – tá preťala *k* v bode *H* a *l* v bode *G*. Z Talesovej vety pre kružnicu *k* vyplýva, že uhol *CGH* je pravý, podobne z Talesovej vety pre kružnicu *l* vyplýva, že uhol *CHG* je pravý. Trojuholník *CHG* má teda dva pravé uhly. Čo si o tom myslíte?



*9. Nech bod *A* neleží na kružnici *k* so stredom *S* a polomerom *r*. Priamka *p* prechádzajúca bodom *A* pretína kružnicu *k* v bodoch *X, Y*. Dokážte, že $|AX| \cdot |AY| = |AS|^2 - r^2$.

*10. Zistite, akú časť obsahu trojuholníka *ABC* tvorí trojuholník *XYZ* podľa obrázka, ak viete, že trojuholník *ABC* je rovnostranný a body *M, N, P* delia jeho strany *BC, CA, AB* v pomere 2 : 1



b) Riešte pre všeobecný trojuholník ABC.

*11. Pomocou nasledujúceho obrázku odvoďte platnosť vzorca:

$$2(c-a)(c-b) = (a+b-c)^2$$