# 1. Dôvodenie

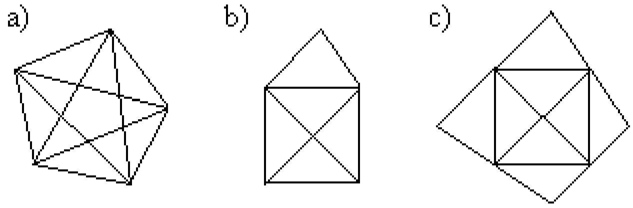
1. Jožko napísal čísla od 1 po 20. Potom si vybral dve z nich, sčítal ich, výsledok zapísal za 20 a vybrané čísla prečiarkol. Znovu si vybral nejaké dve (neškrtnuté) čísla, sčítal ich, zapísal výsledok na koniec číselného radu, vybrané čísla prečiarkol. Takto pokračoval, až kým mu ostalo iba jedno číslo. Aké najväčšie a aké najmenšie číslo mohol takto dostať?

2. Z cifier 1, 2, ..., 9 vytvoríme 9-ciferné číslo, v ktorom sa žiadna číslica neopakuje. Môže byť toto číslo prvočíslo?

3. Štyria chlapci - Adam, Boris, Cyril a Dano - chcú prejsť cez tunel. Adamovi trvá cesta cez tunel minútu, Borisovi dve minúty, Cyrilovi štyri a Danovi päť minút. Nakoľko je tunel príliš úzky, môžu cezeň prejsť nanajvýš dvaja chlapci naraz. Majú k dispozícii lampu, ktorá vydrží svietiť 12 minút. Podarí sa chlapcom prejsť cez tunel tak, aby nikto z nich nemusel prechádzať potme? (Ak prechádzajú dvaja chlapci naraz, idú rýchlosťou pomalšieho z nich.)

4. Dá sa pomocou dlaždíc tvaru T (zo štyroch štvorčekov) vydláždiť štvorcové námestie $8 \times 8$ štvorčekov?

5. Nakreslite jedným ťahom nasledujúce obrazce:




   d) V rovine sú dané 4 body, ktoré sú vrcholmi rovnobežníka. Pospájajte ich tak, aby vznikol obrazec, ktorý sa nedá nakresliť jedným ťahom.

6. V miestnosti 7 x 7 metrov je na podlahe 50 mravcov. Dokážte, že vzdialenosť niektorých dvoch z nich je menšia ako 1,5 metra.

7. V lesnej súťaži v spoločenských tancoch mal každý z 12-tich súťažiacich číslo od 1 do 12. Šiesti trpaslíci mali pritom párne a šesť trpaslíc nepárne čísla. Medveď si všimol, že súčet čísel v jednotlivých pároch je vždy prvočíslo, a navyše sú tieto prvočísla rôzne. Zistite, ktorí trpaslíci a trpaslice spolu tancovali.

8. Miško mal dokázať, že ak nemožno len pomocou pravítka a kružidla skonštruovať uhol veľkosti $1^\circ$, nemožno pomocou pravítka a kružidla skonštruovať ani uhol veľkosti $19^\circ$. Pomohol si tak, že tvrdenie nahradil iným, ktoré už poľahky dokázal. Viete, akým tvrdením Miško nahradil pôvodný výrok? Podarí sa vám ho dokázať?

9. a) Sú dané 3 prirodzené čísla. Dokážte, že spomedzi nich vždy môžeme vybrať dve také, ktorých aritmetickým priemerom je prirodzené číslo.
   b) V rovine je daných 5 rôznych mrežových bodov (mrežový bod je bod s celočíselnými súradnicami). Dokážte, že aspoň jeden zo stredov úsečiek, ktoré majú vrcholy v týchto mrežových bodoch, je opäť mrežový bod.

# 2. Teória čísel II

1. Určte najmenšie prirodzené číslo, ktoré aj pri delení tromi aj pri delení siedmimi dáva zvyšok 2 a pri delení piatimi zvyšok 3.

2. Nájdite všetky prirodzené dvojciferné čísla, ktoré pri delení číslami 6 a 7 dávajú v poradí zvyšky
   a) 2 a 2
   b) 5 a 6
   c) 4 a 2

3. Nájdite všetky prvočísla $p$, pre ktoré aj čísla $p - 34$, $p + 34$ sú prvočíslami.

4. a) Koľko deliteľov majú čísla $p^3$, $p^6$ a $p^k$, kde $p$ je prvočíslo a $k$ prirodzené číslo?
   b) Koľko deliteľov má číslo $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n$, kde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ je $n$ navzájom rôznych prvočísel ?
   c) Koľko deliteľov majú čísla $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$ a $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, kde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ sú navzájom rôzne prvočísla a $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ sú prirodzené čísla?

5. Aké spoločné delitele môžu mať čísla
   a) $x, x+7$
   b) $x, x+12$
   c) $2x+34, x+11$ ?

6. Pre ktoré $x$ je najväčší spoločný deliteľ čísel $x-5, x+13$ číslo
   a) 18
   b) 4
   c) 6 ?

# 3. Kritériá deliteľnosti

1. Bez toho, aby ste zisťovali podiel, určte zvyšok po delení
   a) čísla 2613 číslom 13
   b) čísla 209 číslom 19
   c) čísla 132 číslom 11
   d) čísla 185 číslom 7

2. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení:
   a) Číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy, keď je štyrmi deliteľné jeho posledné dvojčíslie.
   b) Číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy, keď je štyrmi deliteľné jeho posledné trojčíslie.
   c) Číslo je deliteľné šiestimi práve vtedy, keď je deliteľné dvoma a tromi.
   d) Číslo je deliteľné šiestimi práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný šiestimi.

3. Doplňte namiesto * číslice tak, aby všetky uvedené čísla dávali po delení deviatimi rovnaký zvyšok. Je takéto doplnenie jednoznačné?
   34, 4*, 4*3, *04, *40, 4*0, *003, *400, 30*00

4. Čo musí platiť pre prirodzené čísla $a$ a $b$, aby ľubovoľné nimi deliteľné prirodzené číslo bolo deliteľné aj ich súčinom?

5. Aký zvyšok dávajú po delení číslom 11 čísla 10, 100, 1000, 10000, 100000?
   Vymyslite kritérium deliteľnosti číslom 11.

6. Jano si nevie spomenúť na poslednú číslicu svojho rodného čísla 750403/845*. Ako ju môže zistiť, ak pri sebe nemá žiadne doklady?

7. Odvoďte kritérium deliteľnosti číslami 7 a 13.

# 4. Exponenciálne a logaritmické funkcie a rovnice

1. Určte $x$, ak platí:

   a) $x = \log_2 0{,}5$  b) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$  c) $\log_5 x = -2$

2. Riešte sústavy: a) $2^x + 2^y = 12$, $x + y = 5$  b) $2^x . 4^y = 8\sqrt{2}$, $\ln(x + y) = 0$

3. Nájdite všetky také $x \in R$, pre ktoré funkcie f a g nadobúdajú rovnaké hodnoty:

   a) $f : y = (5!)^x$  $g : y = (4!)^{x+1}$

   b) $f : y = x^{\log x}$  $g : y = 1000x^2$

   c) $f : y = 4^{\log_9 x^2} - 1$  $g : y = 4^{1+\log_9 x} - 4^{-1+\log_9 x}$

4. V rovnici $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x + a) = \log_{\frac{1}{2}}(bx + 3)$ doplňte chýbajúce čísla tak, aby koreňmi rovnice $x^2 + x + a = bx + 3$ boli čísla –3 a 5. Rovnicu potom vyriešte.

5. Riešte v R najskôr ako rovnicu, potom ako nerovnicu. V čom sa líšia riešenia?

   a) $\log_x \sqrt{20 - x} > 1$  b) $\log_{x^2}(x + 2) < 1$

# 5. Inverzná a zložená funkcia

1. Nájdite funkcie $f$, $g$ a $h$ pre ktoré platí: ani jedna z nich nie je zhodná s $i$: $y = x$ a
   a) $f(g(x)) = (2x-3)^2 - 5,\ \ f(h(x)) = x^2 + 1$
   b) $f(g(x)) = (2x-3)^2 - 5,\ \ h(g(x)) = x^2 + 1$

2. Dané sú funkcie $f(g(x)),\ g(x)$. Nájdite predpis funkcie $f$, ak
   a) $f(g(x)) = x^2 - 3x + 11,\quad g(x) = 2x + 5$,
   b) $f(g(x)) = 50x^2 - 7, g(x) = 5x + 3$

3. Ukážte, že funkcie $f: y = 2{,}5x + 1{,}5|x|$ a $g: y = 0{,}625x - 0{,}375|x|$ sú navzájom inverzné funkcie.

4. Aká najväčšia časť kružnice môže byť grafom funkcie, ktorá je sama sebe inverzná?

5. Inverzná funkcia k funkcii $h$ je $h^{-1}: y = \dfrac{7}{x-5}$. Určte funkciu $h$.

6. Aké čísla môžu byť na mieste $a$ a $b$ v predpise funkcie $f$: $y = a.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{5x-1}{7}} + b$, aby definičným oborom funkcie $f^{-1}$ bol interval $(-\infty, 3)$?

7. Načrtnite graf funkcie $f: y = \sqrt{\log(\sin x)}$

# 6. Nerovnice

1. Maťa tvrdí, že každú z uvedených nerovníc možno ekvivalentnými úpravami upraviť na nerovnicu $x - 1 < 4$. Má pravdu?

   a) $-2 > x - 7$ c) $-4x < -20$ e) $\frac{2x}{3} < \frac{x}{2} + \frac{5}{6}$

   b) $10 > 2x$ d) $3x + 1 < 2x + 6$ f) $\frac{10}{x} > 2$

2. Štyria spolužiaci rozdeľovali množinu R na intervaly, ktoré celé buď sú alebo nie sú riešením nerovnice $3x^2 - 5x + 2 \le 0$. Jožo tvrdí, že sú to intervaly $(-\infty, 0\rangle$, $(0, \infty)$; Milke vyšli intervaly $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 5\rangle$, $(5, \infty)$; Luciine riešenie je $(-\infty, 2/3)$, $\langle 2/3, 1\rangle$, $(1, \infty)$ a Peter rozdelil R na intervaly $(-\infty, 2/3)$, $\langle 2/3, 1\rangle$, $(1, 3\rangle$, $\langle 3, \infty)$. Kto z nich má pravdu? Ktoré intervaly sú riešením nerovnice?

3. Riešte nerovnice:

   a) $(x - 3)(4 + x) < 0$ b) $\frac{x-3}{4+x} < 0$ c) $x^2 + x - 12 < 0$

   d) $\frac{3+x}{x-2} < 1$ e) $\frac{2x}{x^2+1} > 1$

4. Do prázdnej zátvorky nerovnice $\frac{(3-x)(\ )}{(x+5)(x-3)} \le 0$ dopíšte lineárny výraz tak, aby riešením nerovnice bolo

   a) $R - \{-5\}$ d) $\{\ \}$
   b) $R - \{3\}$ e) $\{-5, 3\}$
   c) $R - \{-5, 3\}$

5. a) Aké riešenia a pre ktoré $p, q \in N$ má nerovnica $(x - 2)^p(x + 5)^q \ge 0$?
   b) Nájdite polynóm 12. stupňa, ktorý by bol kladný práve vtedy, ak $x \in (-2, 3) \cup (5, \infty)$.

6. a) Napíšte kvadratickú nerovnicu, ktorej oborom riešení je $(-1, 2)$, alebo $(-\infty, 5) \cup (7, \infty)$.
   b) Vymyslite nerovnicu, ktorej množina riešení je $(-\infty, -4) \cup (1, 2)$, alebo $\{-5\} \cup \langle 2, \infty)$.

7. a) Z výrazov $4 - x$, $x - 4$, $x + 2$, $5x + 10$, $x - 1$ zostavte všetky lineárne lomené výrazy, ktoré sú nezáporné práve vtedy, keď $x \in (-2, 4\rangle$.
   b) Lenka tvrdí, že do zátvoriek nerovnice $\frac{(\ )(\ )}{(\ )(\ )} \ge 0$ vie dopísať lineárne výrazy tak, aby riešením nerovnice bol $(-3, 4)$. Viete to aj vy?

# 7. Percentá

1. Koľko percent zo 40 % je 8 %?

2. Správa z tlače: „Nezamestnanosť na Slovensku dosiahla 20 %, čo predstavuje približne 500 tisíc nezamestnaných. Vláda sa zaviazala znížiť nezamestnanosť o 3 %, t. j. na približne 425 tisíc nezamestnaných“. Je táto správa z matematického hľadiska korektná? Vysvetlite.

3. Dĺžka obdĺžnikového pozemku je o 8 m menšia ako trojnásobok jeho šírky. Ak zväčšíme šírku pozemku o 5 % dĺžky a dĺžku zmenšíme o 14 % (pôvodnej) šírky, zväčší sa obvod pozemku o 30 m. Určte pôvodné rozmery pozemku.

4. V decembri vážili potkany Agáta a Adela rovnako. Do marca pribrala Agáta 10 % svojej hmotnosti a potom do júna schudla 20 % (marcovej) hmotnosti. Adela naopak do marca schudla 20 % hmotnosti a potom do júna pribrala 10 % (marcovej) hmotnosti. Ktorý z potkanov bol v júni ľahší?

5. Keď sa ťava Olinka napije, váži približne 800 kg a 85 % jej hmotnosti tvorí voda. Keď je Olinka smädná, tvorí voda len 84% jej hmotnosti. Koľko váži Olinka, keď je smädná?

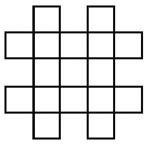
6. Čerstvé huby obsahujú 90 % vody, sušené už len 20 %. Koľko kg sušených húb dostaneme z 10 kg čerstvých?

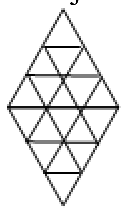
7. V železiarstve Plech & Syn majú dva druhy zliatin cínu a olova. Jeden z nich obsahuje 20 % a druhý 60 % cínu (ide o percentá vzhľadom na hmotnosť zliatiny). Zmiešaním oboch druhov zliatin a pridaním 2 kg čistého olova chcú vyrobiť 10 kg zliatiny obsahujúcej 30 % cínu. Koľko kilogramov každého z predchádzajúcich druhov potrebujú k výrobe novej zliatiny?

8. Obuvnícka firma Črievička spol. s r.o. splnila v prvom týždni plán, t.j. vyrobila $n$ párov topánok. V druhom týždni poklesla výroba oproti prvému týždňu o $p$ %. O koľko percent oproti druhému týždňu musela firma zvýšiť výkon v treťom týždni, aby koncom tretieho týždňa bol splnený trojtýždenný plán?

# 8. Kombinatorika I

1. a) Koľko štvorcov je na obrázku? b) Koľko trojuholníkov je na obrázku?



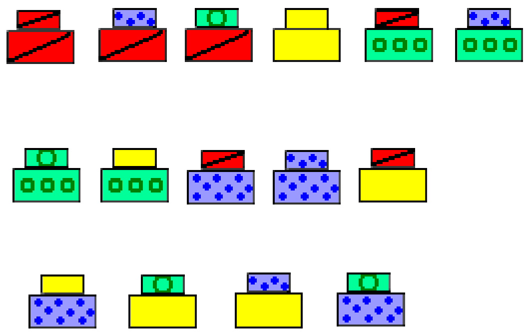


2. Koľkými spôsobmi sa na tomto obrázku dá prečítať slovo TROLEJ?

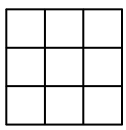
| | | | |
|---|---|---|---|
| T | R | O | L |
| R | O | L | E |
| O | L | E | J |

3. Do môjho bytu vedie 6 schodov. Jedným krokom môžem vystúpiť o jeden, alebo dva schody vyššie. Koľkými spôsobmi môžem vyjsť nahor do svojho bytu?

4. V stavebnici sú malé a veľké tehličky, každý druh vo štyroch farbách. Pokúsili sme sa postaviť z nich všetky možné loďky zložené z veľkej a malej tehličky. Nezabudli sme na nejakú?



5. Vyfarbite tabuľku na obrázku troma farbami tak, aby v každom stĺpci aj riadku bola každá farba práve raz. Koľkými spôsobmi to viete spraviť? (Každé políčko je jednofarebné.)



6. Zistite súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré sa dajú vytvoriť z cifier
   a) 7, 8, 9,
   b) 1, 2, 3, 4,
   ak sa žiadna z nich nemá vyskytovať v čísle viac ako raz.

7. Z číslic 2, 3, 4, 5 vytvárame štvorciferné čísla tak, aby sa žiadna z cifier nevyskytovala v čísle viac ako raz. Vypíšte všetky tie z vytvorených čísel, ktoré sú väčšie ako 3400.

8. Hádžeme troma kockami, modrou, žltou a červenou a sčítame padnuté čísla. Aký súčet nám pravdepodobne vyjde častejšie, 6 alebo 16? Prečo?

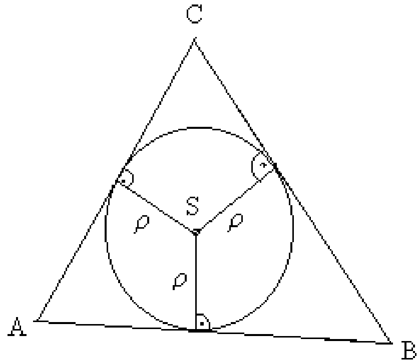
9. Martin, Tomáš, Lenka, Igor, Jano, Fero a Blažena sú vo Vysokých Tatrách. Chystajú sa vystúpiť na Gerlachovský štít. Rozhodli sa, že jedna skupina vyrazí zo Sliezskeho domu, druhá im pôjde oproti od Batizovského plesa. Vypíšte všetky možné zloženia oboch skupín, ak nik nemá ísť sám.

# 9. Geometria II

1. Rozdeľte trojuholník na 3 časti tak, aby sa z nich dal zložiť obdĺžnik.

2. Fero zostrojil trojuholník *ABC* a jeho priesečník výšok *V*. Potom zostrojil priesečník výšok trojuholníka *BCV*. Aký bod mu vyšiel, ak úlohu vyriešil správne?

3. V dedkovej knižnici našiel Fero starú učebnicu matematiky. V jednom z príkladov bol takýto obrázok:

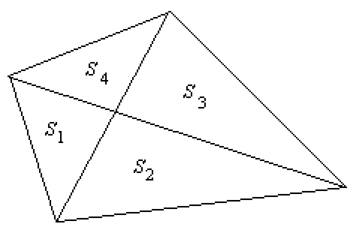



Časť textu príkladu bola bohužiaľ nečitateľná (Podľa škvrny, ktorá tam bola, Fero usúdil, že tam dedko vylial kávu.). Rozlúštil iba toto:

$S_{ABC} = S_{ABS} +$  =  = $\rho . s$

Doplňte chýbajúce časti textu. Čo vyjadruje v predchádzajúcom vzťahu *s*?

4. Konvexný štvoruholník je svojimi uhlopriečkami rozdelený na 4 trojuholníky s obsahmi $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Fero tvrdí, že pre nasledujúci obrázok platí $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$. Podľa Janky však platí $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Kto má pravdu?




5. Trojuholník, ktorý sa dá rozdeliť na *n* zhodných s ním podobných trojuholníkov, budeme volať *n-podobník*. Nájdite:
   a) *štvorpodobník*
   b) *trojpodobník*
   c) trojuholník, ktorý je súčasne *troj-* aj *štvorpodobníkom*

6. Rebrík je opretý o stenu a v jeho strede sedí žaba. Fero bol zvedavý, čo žaba urobí, keď sa rebrík začne posúvať a trochu mu „pomohol" – posunul spodný koniec rebríka ďalej od steny. Rebrík sa zosúval po podlahe, žaba zmeravená od strachu však ostala sedieť v jeho strede až do okamihu, kým nebol celý na zemi. Po akej dráhe sa pohybovala žaba?

7. Dokážte, že ťažnice rozdeľujú trojuholník na šesť trojuholníkov s rovnakým obsahom.

8. a) Je daná priamka $p$, úsečka $PQ$ a dva rôzne body $A$, $B$ v tej istej polrovine ohraničenej priamkou $p$. Na priamke $p$ zostrojte body $X$, $Y$ tak, aby $|XY| = |PQ|$ a dĺžka lomenej čiary $AXYB$ bola minimálna.

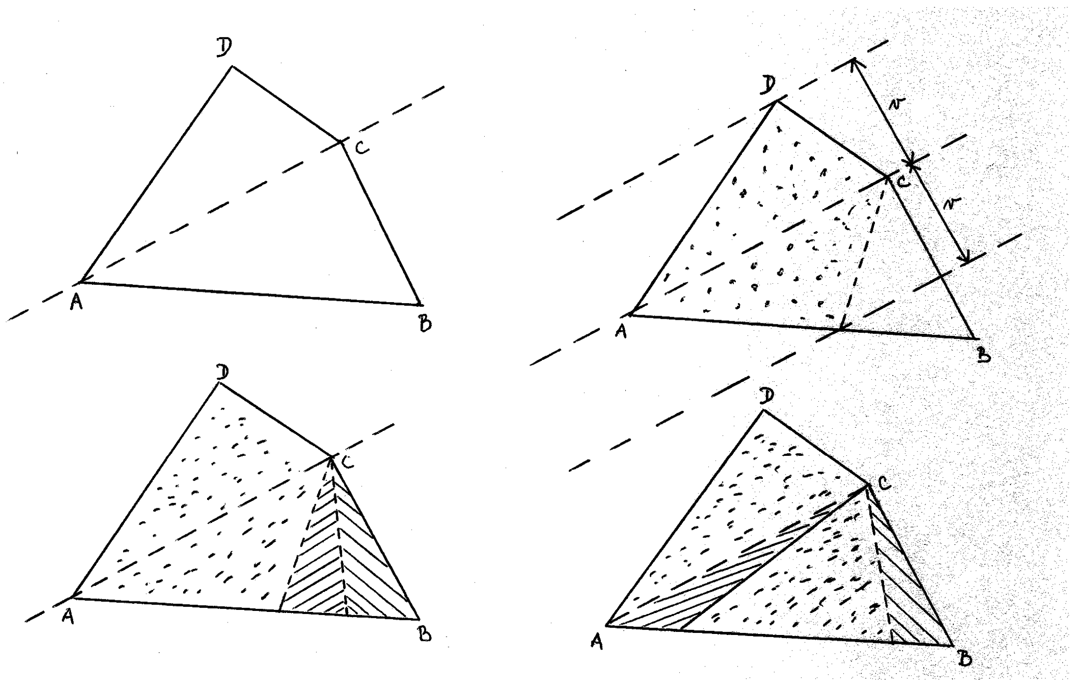
   b)Na základni $AB$ ľubovoľného rovnoramenného trojuholníka nájdite bod $L$ tak, aby súčet jeho vzdialeností od priamok $AC$ a $BC$ bol minimálny.

   c) Blšie Námestie má tvar rovnostranného trojuholníka. Na námestí má stáť novinový stánok tak, aby súčet jeho vzdialeností od všetkých troch ulíc tvoriacich hranice námestia bol čo najmenší. Kde treba stánok postaviť?

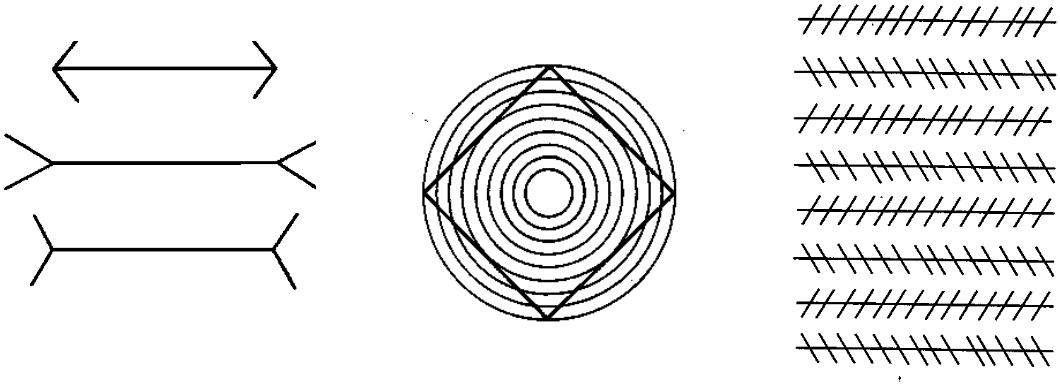
9. Jedna z úloh, ktoré mal Fero riešiť na teste, bola táto:
   a) Nech $a$, $b$, $c$ sú po poradí dĺžky odvesien a prepony pravouhlého trojuholníka $ABC$. Dokážte, že pre polomer $r$ kružnice vpísanej do trojuholníka $ABC$ platí
   $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.
   Fera nič rozumné nenapadlo, preto mrkol očkom po Jankinej písomke. Jediné, čo stihol odpísať, bolo $c = (b - r) + (a - r)$. Z tejto rovnosti už bez problémov odvodil žiadaný vzorec, nedokázal však zistiť, ako Janka na túto rovnosť prišla. Vy to viete? Ak nie, skúste úlohu vyriešiť inak.

   b) Odvoďte vzťah pre polomer kružnice, ktorá sa zvonku dotýka prepony trojuholníka $ABC$ a polpriamok, na ktorých ležia jeho odvesny.

10. Fero tvrdí, že každý konvexný štvoruholník rozdeliť priamkou na dve časti s rovnakým obsahom. Jeho riešenie sa skrýva v nasledujúcich obrázkoch. Je správne?



11. Nasledujúce obrázky značne otriasli Ferovým "Verím tomu, čo vidím". Čo je na nich zvláštne?



b) Čo vidíte na tomto obrázku?

c) A čo poviete na obrázok na nasledujúcej strane?