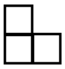
1. Dôvodenie

1. a) Jožko zlepil nový model kocky. Rozhodol sa, že každú z jeho hrán zvýrazní červenou fixkou. Podarí sa mu zvýrazniť všetky hrany tak, aby nemusel zodvihnúť fixku z modelu kocky, ak nechce prejsť po žiadnej hrane viackrát?
   b) Je možné z jedného kusu drôtu zhotoviť drôtený model pravidelného osemstena?

2. Dá sa pomocou dlaždíc tvaru  vydláždiť námestie:
   a)10 x 10 štvorčekov,
   b) 3 x 4 štvorčeky,
   c) 3 x 5 štvorčekov,
   d) 12 x 15 štvorčekov

3. a) Každý bod roviny zafarbíme na modro alebo na červeno. Existujú dva body rovnakej farby, ktoré sú od seba vzdialené presne 1 meter?
   b) Každý bod priestoru zafarbíme na modro, na zeleno alebo na červeno. Existujú dva body rovnakej farby, ktoré sú od seba vzdialené presne 1 meter?

4. Vedec dal do skúmavky 1 111 červených a 9 999 bielych molekúl. Keď sa dostanú do kontaktu dve molekuly rovnakej farby, zreagujú a vznikne jedna biela molekula. Keď sa dostanú do kontaktu dve molekuly rôznej farby, zreagujú a vznikne jedna červená molekula. Akú farbu bude mať posledná molekula v skúmavke?

5. Nech $p_1, p_2, ..., p_n$ je prvých n prvočísel $n \in N$. Je potom číslo $p_1.p_2.....p_n + 1$ opäť prvočíslo?

6. Máme 7 prirodzených čísel $a_1, a_2, ..., a_7$. Označme tieto čísla v inom poradí ako $b_1, b_2, ..., b_7$. Potom číslo $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)...(a_7 - b_7)$ bude vždy párne. Odôvodnite!

7. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení. Svoje rozhodnutie odôvodnite:
   a) Ak $\sqrt{x(x-2)} = 4$ potom $\sqrt{x}\sqrt{x-2} = 4$
   b) Neexistuje obdĺžnik s racionálnym obsahom a iracionálnym obvodom.
   c) Ak sú dve a dve strany štvoruholníka zhodné a uhlopriečky tohto štvoruholníka navzájom kolmé, potom sú zhodné všetky strany štvoruholníka.
   d) Všetky trojuholníky, ktoré sa zhodujú v strane a výške, majú rovnaký obsah.
   e) Ak $a \in Z \Rightarrow a^2 \in Z$, ak $a^2 \notin Z \Rightarrow a \notin Z$. Môžeme teda usúdiť, že $a \in Z \Leftrightarrow a^2 \in Z$
   f) Ak má číslo x konečný desatinný rozvoj, tak sa dá napísať v tvare zlomku.
   Ak sa x nedá napísať v tvare zlomku, tak nemá konečný desatinný rozvoj.
   Číslo x má konečný desatinný rozvoj práve vtedy, keď sa dá napísať v tvare zlomku.
   g) Ak je ciferný súčet čísla n deliteľný tromi, tak aj n je deliteľné tromi.
   Ak n nie je deliteľné tromi, tak jeho ciferný súčet nie je deliteľný tromi.
   Ciferný súčet čísla n je deliteľný tromi práve vtedy, keď je n deliteľné tromi

*8. Na tabuľke 10 x 10 štvorčekov je umiestnená lodička tvaru I tak, že zakrýva štyri štvorčeky. Aký najmenší počet "výstrelov" (v hre Námorná vojna) treba na to, aby bola loď zasiahnutá?

*9. Dokážte AG-nerovnosť pre tri čísla.

2. Teória čísel II

1. a) Aký zvyšok pri delení číslom 13 dávajú čísla $130 \cdot 131$, $262 \cdot 263$, $391 + 392 + 393 + 395 + 397$, $1298 \cdot 1299 \cdot 1300 + 1301^2$, 1289^5?

   b) Viete, že číslo 7^{1999} dáva pri delení číslom 5 zvyšok 3. Zistite, aký zvyšok pri delení číslom 5 dávajú čísla 7^{2000} a 7^{1998}.

   c) Číslo A dáva pri delení číslom 17 zvyšok 6. Aký zvyšok dávajú pri delení číslom 17 čísla $A+100$, $A-815$, $4A$, $9A-435$, A^2, $A^3+12A-29$?

2. a) Nájdite všetky prvočísla, ktoré pri delení číslom 6 nedávajú zvyšok 1 ani zvyšok 5.
   b) Nájdite všetky prvočísla, ktoré pri delení číslom 91 dávajú zvyšok 7.

3. Akými číslicami sa môže končiť a) 2^n, 7^n, n^3, n^5 b) 2^{3n+1}, n^2-3n+2 ?

4. Koľkými nulami sa končí číslo a) 30! b) 200! ?

5. Určte počet deliteľov čísel 32, 729, 625, 525 a 1155.

6. Koľko deliteľov majú čísla $5 \cdot 11$, $5^2 \cdot 11$, $5^3 \cdot 11$, $5^4 \cdot 11$, $5^4 \cdot 11^2$, $5 \cdot 11^3$ a $5^4 \cdot 11^4$? Zmenia sa výsledky tejto úlohy, ak namiesto čísla 11 dáme číslo 2 (alebo 71)?

7. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú práve a) 2, b) 3, c) 5, d) nepárny počet rôznych deliteľov.

*8. a) Nájdite všetky pytagorejské trojuholníky s odvesnou 15.
b) Nájdite všetky pytagorejské trojuholníky s preponou 15.

*9. Nájdite 100 za sebou idúcich zložených čísel.

*10. Vo väzení sedí 100 väzňov v celách označených číslami 1 až 100. Stráži ich 100 dozorcov. Raz v noci sa dozorcovia rozhodli, že niektorým väzňom umožnia utiecť. Najskôr prvý dozorca otočil kľúčom na všetkých celách. Potom druhý dozorca otočil kľúčom na každej druhej cele (2, 4, …, 100), takže nevedomky niektorých väzňov opäť zamkol. Potom tretí dozorca otočil kľúčom na každej tretej cele, atď., až nakoniec posledný – stý dozorca otočil kľúčom na cele číslo 100. Ktoré cely ostali nakoniec odomknuté?

3. Kritériá deliteľnosti

1. Zistite, či sú čísla 625933 a 453778 deliteľné číslom
   a) 7 b) 11 c) 13?

2. Za domácu úlohu mali deti zistiť, či má číslo 7851 jednociferného deliteľa rôzneho od 1. Posúďte riešenia Tomáša a Tibora.
   Tomáš: „Stačí mi skúmať deliteľnosť prvočíslami 2, 3, 5 a 7.
   $$7851 = 7850 + 1$$
   $$2 \text{ nedelí } 1 \Rightarrow 2 \text{ nedelí } 7851,$$
   $$3 \text{ nedelí } 1 \Rightarrow 3 \text{ nedelí } 7851,$$
   $$5 \text{ nedelí } 1 \Rightarrow 5 \text{ nedelí } 7851,$$
   $$7 \text{ nedelí } 1 \Rightarrow 7 \text{ nedelí } 7851$$
   Takže číslo 7851 nemá jednociferné delitele.“
   Tibor: „Ciferný súčet čísla 7851 je 21. Čísla 3 a 7 delia číslo 21 a teda aj číslo 7851, čísla 2, 4, 5, 6, 8 a 9 nie.“

3. Napíšte aspoň jedno päťciferné číslo, ktoré
   a) je deliteľné 5 a nie je deliteľné 2
   b) je deliteľné 5 aj 2
   c) nie je deliteľné 5 a je deliteľné 2
   d) je deliteľné 2 aj 5 a nie je deliteľné číslom 10

4. Doplňte číslice A a B tak, aby číslo bolo deliteľné štyrmi. Nájdite všetky možnosti.
   a) $AA64$ b) $3A0B62$ c) $3A456BB34A$

5. Miško tvrdí, že číslo je deliteľné 4 práve vtedy, keď je 4 deliteľný súčet počtu jednotiek a dvojnásobku počtu desiatok. Má pravdu? Vysvetlite.

6. Milka tvrdí, že číslo je deliteľné 18 práve vtedy, keď je deliteľné číslami 3 a 6. Majka tvrdí, že vtedy, keď je deliteľné 2 a 9. Ktorá z nich má pravdu? Prečo?

7. Zistite, či je číslo 47286 deliteľné deviatimi. Odvoďte kritérium deliteľnosti číslom 9. Viete podobnou úvahou odvodiť kritérium deliteľnosti troma?

8. Sformulujte kritérium deliteľnosti číslom
   a) 16 b) 32 c) 64 d) 128 e) 65536

*9. Sformulujte kritérium deliteľnosti ôsmimi v deviatkovej sústave?

*10. Nájdite najmenšie (najväčšie) prirodzené číslo deliteľné 11, ktorého cifry sú navzájom rôzne.

*11. Pri prepisovaní čísla 35! sme spravili chybu. V skutočnosti je prostredná číslica tohto čísla iná. Aká?

35! = 10333147966386144929**8**66651337523200000000.

4. Exponenciálne a logaritmické funkcie a rovnice

1. Vyjadrite x z rovnosti: $\log x = \frac{3}{4}\log a - \frac{1}{2}(2 + \log b)$

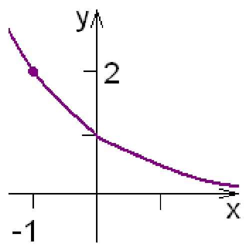
2. Doplňte chýbajúce údaje v tabuľkách:
   a)

x	1	3	$\frac{1}{3}$			
$y = \log_3 x$				2	-2	$\frac{1}{2}$

   b)

x	3		-1		$\sqrt[4]{3}$	
$\log_a x$	2	-1		4		$\sqrt[3]{3}$

3. Pre ktoré $p \in R$ je funkcia $f: y = \left(\frac{3p-7}{2p+5}\right)^x$ klesajúca?



4. Na nasledujúcom obrázku je graf funkcie $f: y = a^x$. Určte a a zistite predpisy funkcií, ktoré dostaneme preklopením grafu funkcie f podľa osi x, resp. y.

5. Julka „preklopila" graf funkcie f podľa osi x a tento potom podľa priamky $y = x$. Dostala graf funkcie $y = \log_a x$, ktorý prechádza bodom $[9,2]$. Aký je predpis funkcie f ?

6. a) Juro mal zistiť, pre ktoré $m \in R$ má rovnica $2^x - 2 = m$ práve dva rôzne korene. Úlohu riešil graficky. Čo mu vyšlo, ak ju riešil správne?
   b) Aký bude výsledok úlohy, ak ľavá strana rovnice z a) bude v absolútnej hodnote?
   c) Do rovnice z a) doplňte absolútnu hodnotu tak, aby rovnica mala práve dva rôzne korene, ak viete, že je $m \in (-1, \infty)$
   d) Zistite počet koreňov rovnice $\left|2^{|x|} - 2\right| = m$ pre všetky hodnoty $m \in R$.

7. V rovnici $\left|\log_5 |x|\right| = k$ zistite všetky $k \in R$, pre ktoré je množina koreňov nula-, jedno-, dvoj-, troj-, štvor- a päť- prvková.

8. Riešte v R:

a) $\left(1-\frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{x-5}}$ b) $2^{\frac{3}{\log_2 x}}=\frac{1}{64}$ c) $\sqrt[x]{81}+\frac{27}{\sqrt[x]{81}}=12$

d) $5.2^{x+2}-6.3^{x+2}=3^{x+3}+2.2^{x+1}$ e) $\log(2x-3)+\log 3x=\log(8x-12)$

f) $\log_6\left[\log_5\left(\log_4 x+\frac{4}{\log_4 x}\right)\right]=0$ g) $4^x+6^x=9^x$

h) $\log_x 3.\log_{\frac{x}{3}} 3=\log_{\frac{x^2}{9}} 3$ i) $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2$

*9. Vypočítajte:

$[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+....+[\log 2000^3]=$

Symbolom $[x]$ označujeme celú časť čísla x, napr. $[1{,}7]=1$, $[-2{,}3]=-3$

*10. Riešte v R rovnicu $5^x+12^x=13^x$.

*11. Určte všetky reálne čísla x a y, pre ktoré platí:

$$\log_2\left[\sin^2(xy)+\frac{1}{\sin^2(xy)}\right]=\frac{1}{y^2+2y+2}$$

*12. Doplňte správne znamienka nerovnosti.

a) $\log 999\ 9999+\log 1\ 000\ 001$ $\boxed{}$ $2.\log 1\ 000\ 000$

b) $2^{100}.[1{,}23^{100}+3{,}21^{100}]$ $\boxed{}$ $4{,}44^{100}$

5. Inverzná a zložená funkcia

1. Nájdite predpisy funkcií $f(g(x))$, $g(f(x))$ a $g(g(x))$ pre dané funkcie f a g:
   a) $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x\sqrt[3]{4x-7}$,
   b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $g(x)=\dfrac{x^3-1}{4}$.

2. Nájdite funkcie f a h ($f,h\neq g$, kde $g: y=x$) pre ktoré platí:
   a) $h(f(x))=x^2+1$ b) $f(h(x))=(2x-3)^2-5$

3. Nájdite funkcie inverzné k nasledujúcim funkciám
   a) $y=2x-5$ b) $y=\sqrt{3x+2+\dfrac{x}{2}}$ c) $y=|x+3|$
   d) $y=\sqrt{2x+5}-1$ e) $y=(x+4)^2-5,\ x\in(-2,1)$

4. Určte aspoň jednu funkciu f, pre ktorú platí $f(f(x))=25x+7$.

5. Načrtnite grafy funkcií f: $y=\sqrt{2x+1}$, g: $y=2-\sqrt{4-2x-x^2}$.

6. Sú niektoré z uvedených funkcií navzájom inverzné?
   $f: y=1-4^{x+2}$ $g: y=2-\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ $h: y=-2+\log_4(1-x)$ $i: y=3^{x-2}-2$

7. Jano tvrdí, že funkcie $f: y=\log_x x^x$ a $g: y=2^{\log_2 x}$ sú rovnaké. To isté vraj platí aj pre funkcie $h: y=\log_{|x|} x$ a $i: y=\log_x |x|$. Má pravdu?

8. Funkcia f^{-1} je na R rastúca, zdola ohraničená -1, zhora 5. Čo všetko vieme zistiť na základe týchto informácií o funkcii f?

*9. Ktoré lineárne funkcie dávajú skladaním $f(f(f\ldots(x)\ldots))$ konečný počet rôznych funkcií?

*10. Určte aspoň jednu funkciu f, pre ktorú platí $f(f(x))=x^2$.

*11. Pre ktoré hodnoty $a,b\in R$ je funkcia $y=x^3+6x^2+ax+b$ prostá? Riešte ako druháci na strednej škole, iným spôsobom.

*12. Pre ktoré $a,b\in R$ je oborom hodnôt funkcie $y=\dfrac{ax+b}{x^2+4}$ interval $\langle -1,2\rangle$?

*13. Určte aspoň jednu funkciu f, pre ktorú platí $f(x+2)-f(x)=3$ pre všetky $x\in R$.

*14. Zistite, pre ktoré $s, t \in R$ sú funkcie $y = sx + |x|$ a $y = 3 + t|x|$ navzájom inverzné.

*15. Nájdite kvadratické funkcie f, g, pre ktoré platí $f(g(x)) = (x+1)(x-7)(x-11)(x+5)$.

6. Nerovnice

1. Vymyslite nerovnicu, ktorej riešením je
   a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\{3\}$ c) $\{\ \}$ d) R

2. Do □ v zápise $25x^2 + 10x$ □ $(5x + 1)^2$ dopíšte znak nerovnosti tak, aby ste dostali nerovnicu ekvivalentnú s nerovnicou $5x > 5x - 2$.

3. Pre ktoré $a \in$ R <u>nie je</u> uvedený výraz kladný?
   a) $\dfrac{a-3}{-2}$ b) $\dfrac{5}{a-3}$ c) $\dfrac{7-a}{6+a}$

4. a) V zápise $(x + a)(x - b)(x + c) * 0$ nahraďte a, b a c číslami a $*$ znakom nerovnosti, aby ste dostali nerovnicu s množinou koreňov $(-4, -3) \cup (1, \infty)$.
   b) Zmeňte výraz v jednej zátvorke tak, aby riešením nerovnice bolo $(-\infty,-4) \cup (-3,1)$

5. a) Riešte nerovnicu $x^3 - 14x^2 + 40x \leq 0$
   b) Igor riešil nerovnicu $(x - 1)^2(2 - x)(3 + x) \leq 0$. Zistil nulové body činiteľov: 1, 2, -3 a rozdelil R na intervaly $(-\infty, -3\rangle$, $\langle -3, 1\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 2, \infty)$. Potom určil znamienko v $\langle -3, 1\rangle$ a ostatné znamienka doplnil tak, aby sa striedali.
   Vyšlo mu K = $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$. Číslo 10 je ale tiež riešením nerovnice. Kde urobil chybu?

6. a) Lucia riešila nerovnicu v tvare $\dfrac{V_1}{V_2} < 0$, kde V_1, V_2 boli lineárne výrazy. Správne jej vyšlo riešenie K = $(-2, 5)$. Nájdite lineárne výrazy V_1 a V_2, ktoré by mohli byť na ľavej strane nerovnice?
   b) Má Lucia pravdu, ak tvrdí, že rovnaké riešenie ako v nerovnici $\dfrac{V_1}{V_2} < 0$ vychádza aj v nerovnici $\dfrac{V_2}{V_1} < 0$?
   c) Platí Luciino tvrdenie z b) v prípade, že je znak "<" v oboch nerovniciach nahradený znakom "≤"?
   d) Nájdite ešte jednu nerovnicu tvorenú iba výrazmi V_1 a V_2, ktorej riešením tiež bude interval K

7. Riešte nerovnice v R:
   a) $\dfrac{(x-5)(x^2-x+10)}{x^2-25} \geq 0$ c) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} < \dfrac{1-2x}{x^3+1}$
   b) $\dfrac{x+4}{x^2-9} - \dfrac{2}{x+3} < \dfrac{4x}{3x-x^2}$ d) $\dfrac{5-x}{2x-2} + \dfrac{1+4x}{2x+2} < 1$

8. Janka a Milan riešili nerovnicu $\frac{x^2+3x}{x} \geq 1$.

Janka postupovala takto:

pre $x \geq 0$ $\quad x^2 + 3x \geq x$
$x^2 + 2x \geq 0$
$x(x + 2) \geq 0$
$x \in [(-\infty, -2\rangle \cup \langle 0, \infty)] \cap \langle 0, \infty) = \langle 0, \infty)$

pre $x < 0$ $\quad x^2 + 3x \leq x$
$x^2 + 2x \leq 0$
$x(x + 2) \leq 0$
$x \in \langle -2, 0\rangle \cap (-\infty, 0) = \langle -2, 0)$

$K = \langle 0, \infty) \cup \langle -2, 0) = \langle -2, \infty)$

a Milan takto: $\frac{x^2+3x}{x} \geq 1$

$\frac{x(x+3)}{x} \geq 1$
$x + 3 \geq 1$
$x \geq -2$
$K = \langle -2, \infty)$

Posúďte ich metódy.

*9. Riešte v R: $(((x-1)^2 - 2)^3 - 3)^4 - 4 \leq 252$

*10. a)Vymyslite nerovnicu, ktorá má práve 5 koreňov
b) Nájdite nerovnicu, ktorej riešením je R a mala by to isté riešenie aj po obrátení znaku nerovnosti.

*11. V nerovnici $\frac{(x-1)^a(3-x)^b}{(x+10)^c(-4-x)^d} \leq 0$ nájdite a, b, c, d $\in$ N také, aby ich súčet bol 99 a
a) riešením nerovnice bolo $\{1\} \cup \langle 3, \infty)$
b) číslo 2 patrilo ku koreňom nerovnice, ale nebolo koreňom žiadnej ďalšej nerovnice, ktorú dostanete zámenou všetkých exponentov.

7. Percentá

1. Posúďte a odôvodnite:
   a. Môže byť 45% viac ako 72%?
   b. Je viac 16 % zo 47 alebo 47 % zo 16?
   c. Čo je viac, 17 % z 80 alebo 81 % zo 16?

2. Na jar stál v našom obchode kilogram melónov 1€. Počas sezóny melóny zlacneli o 60 %, na jeseň o 60 % zdraželi. Koľko stáli v našom obchode melóny na jeseň?

3. Podnikateľ Vinco sa rozhodol experimentálne zistiť optimálnu cenu, za ktorú treba predávať toaletný papier. Zistil, že keď zvýši pôvodnú cenu o 10 %, klesne mu počet predaných výrobkov o 10 %. Keď zníži pôvodnú cenu o 5 %, vzrastie mu počet predaných výrobkov o 5 %. Ktorá z cien, pôvodná, vyššia alebo nižšia, je pre Vinca (z hľadiska maximálnej tržby) najvýhodnejšia?

4. Škriatkovia Figi a Cigi dostali na narodeniny každý po 5 000 Šk (Škriatkovských korún). Rozhodli sa vložiť ich do NBŠ (Národnej Banky Škriatkova). Figi tvrdil, že finančne výhodnejšie bude peniaze spojiť a dať ich do banky ako jeden vklad. Cigi bol presvedčený, že výhodnejšie bude, keď každý vloží svoje peniaze samostatne. Ktorý spôsob je finančne výhodnejší, ak v oboch prípadoch išlo o ročný vklad s úrokovou mierou 213 %? (V Škriatkove sa neplatia žiadne poplatky za vytvorenie a vedenie účtu.)

5. V prvom štvrťroku mala pekáreň Pletienka rovnakú tržbu ako pekáreň Kvások. V druhom štvrťroku sa Pletienke zvýšila tržba o 20 % a v treťom štvrťroku o ďalších 20 %. Kvások mal v druhom štvrťroku rovnakú tržbu ako v prvom, zato v treťom mu stúpla o 40 %. Ktorá pekáreň mala v treťom štvrťroku väčšiu tržbu.

6. Máme 1500 gramov 7,2-percentného roztoku kuchynskej soli vo vode (t.j. roztok váži 1500 g a 7,2 % z 1500 g tvorí soľ, zvyšok voda). Varením tohto roztoku sa odparí časť vody a zostane 1200 gramov nového roztoku.
   a) Koľko percentný bude tento nový roztok?
   b) Koľko gramov soli musíme pridať do nového roztoku, aby vznikol 25-percentný roztok?

7. Marek dostal z písomky päťku. Ockovi povedal, že päťku dostalo 31 % všetkých, čo písali písomku, teda okrem neho ešte ďalší šiesti. Hoci ocko nevedel, koľko má Marek spolužiakov ani koľkí písali písomku, po chvíli prišiel na to, že Marek určite klame. Podľa čoho to spoznal? (Ocko pritom pripúšťal možnosť, že Marek percentá zaokrúhlil.)

8. Koľko litrov vody treba priliať do 10 litrov 90-92% liehu, aby sme dostali lieh 40-42%?

*9. Na prednáške bolo 141 ľudí. Z prítomných mužov 46,6 % malo okuliare, z prítomných žien 16,2 % malo okuliare. Koľko bolo na prednáške mužov a koľko žien? (Percentuálne údaje sú zaokrúhlené.)

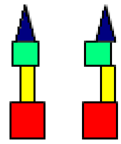
*10. V cukrárni si môžete okrem iných dobrôt kúpiť aj jahodový koktail. Pripravujú ho z jahodového prášku, sušeného mlieka a vody, pričom na jeden diel jahodového prášku pripadajú dva diely mlieka. Vlani stálo 150 g jahodového prášku dvakrát toľko čo 10 dkg sušeného mlieka. Na začiatku tohto roka však jahodový prášok zlacnel o 25 % a sušené mlieko zdraželo o 20 % pôvodnej ceny. Ako sa zmenila cena jahodového koktailu, ak si za jeho prípravu ani za vodu neúčtujú nič?

*11. Kockami o objeme 1 cm^3 vieme vyplniť 100 % objemu škatule tvaru kvádra. Kockami o objeme 8 cm^3 môžeme vyplniť najviac 80 % objemu tejto škatule.
Zistite
a) najmenšie možné rozmery škatule,
b) objem škatule, ak viete, že tri rôzne dĺžky jej hrán sú tri za sebou idúce člen aritmetickej postupnosti.

*12. Pani Eliška denne upletie 10 % z pulóvra a vždy ráno, pred ďalším pletením, vypára 1 % z toho, čo už uplietla (celkovo). Za koľko dní upletie celý pulóver?

8. Kombinatorika I

1. K dispozícii máte valec, dve kocky rôznych veľkostí a štvorsten. Postavte z tohto materiálu čo najviac rôznych „štvordielnych“ veží. (Veže na obrázku nepovažujeme za rôzne.)

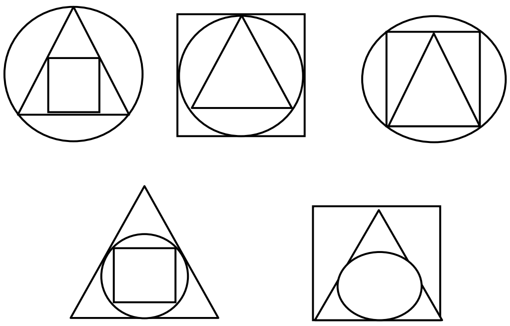


2. Každý kocúrkovský vlak má rušeň a 4 vagóny, 2 červené a 2 modré. Žiadne dva kocúrkovské vlaky nie sú rovnaké. Koľko môžu mať v Kocúrkove vlakov? Nakreslite ich všetky.

3. Vypíšte všetky čísla, ktoré sú:
   a) trojciferné, vytvorené z číslic 1, 3, 5, číslice sa môžu opakovať
   b) trojciferné, vytvorené z číslic 1, 3, 5, číslice sa nesmú opakovať
   c) dvojciferné čísla, ktoré neobsahujú iné cifry ako 2, 4, 6 a 8
   d) párne trojciferné čísla zložené z cifier 0, 1, 2 a 3, ktoré neobsahujú dve rovnaké číslice
   e) dvojciferné čísla deliteľné štyrmi, ktorých obe cifry sú párne

4. Pre ktoré trojciferné čísla platí, že súčet ich číslic je a) 6, b) 8?

5. Nakreslili sme 5 obrázkov, ako do seba vpísať kružnicu, štvorec a trojuholník. Dá sa však vymyslieť aj šiesty. Aký?

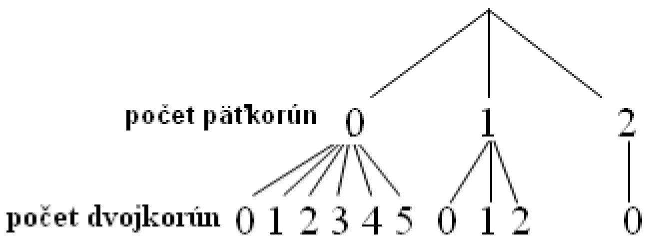


6. Deti dostali za úlohu nájsť všetky spôsoby, ako rozmeniť desaťkorunu na koruny, dvojkoruny a päťkoruny. Pozrite sa, ako si s ňou poradili:
   Eva:

Počet päťkorún	Počet dvojkorún	Počet korún
2	-	-
-	5	-
-	-	10
1	-	5
-	3	4
-	4	2
1	2	1

Peter: Päťkorunu možno rozmeniť troma spôsobmi: 5 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1. Desaťkoruna, to sú dve päťkoruny, každú z nich môžeme rozdeliť troma spôsobmi, takže celkove máme 6 možností.

Roman: Pri rozmieňaní použijeme 0, 1 alebo 2 päťkoruny. Ak použijeme 0 päťkorún, tak môžeme použiť 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5 dvojkorún. Ak predpíšeme počet päťkorún a dvojkorún, tak počet korún už je jednoznačne určený, korunami dopĺňame súčet do 10. Ďalšie úvahy vidieť na obrázku:



7. Máme 3 jablká, 5 hrušiek a 12 sliviek. Chceme z nich pripraviť „15-kusový“ ovocný balíček, v ktorom bude zastúpený každý z uvedených druhov ovocia. Koľko máme možností, ako to spraviť?

8. Tréner zostavuje trojčlenné reprezentačné družstvo. Rozhoduje sa medzi Adamom, Borisom, Cyrilom, Danom a Evou, nechce však navrhnúť súčasne Evu aj Borisa. Aké má za uvedených podmienok možnosti?

*9. Mám 4 červené, 8 bielych a 7 modrých korálikov. Koľkými spôsobmi ich môžem navliecť na šnúrku, ak každý červený musí byť medzi bielym a modrým a biely nesmie byť vedľa modrého? Koráliky tej istej farby sú nerozlíšiteľné.(Dobré navlečenie je napr. MCBBBCB BBBBCMMMM.)

*10. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť 100 korunových mincí medzi Roba, Fera a Joža tak, aby každý z nich dostal aspoň korunu

*11. Na večierku je 14 ľudí - 7 manželských dvojíc. Koľkým spôsobmi je možné ich rozdeliť do 7 tanečných párov tak, aby žiaden muž netancoval so svojou manželkou?,

9. Geometria II

1. Fero sa „hral“: Zostrojil kružnicu k, jej priemer AB a na kružnici k zvolil ľubovoľné dva rôzne body C, D (rôzne aj od A aj od B). Potom zostrojil priamky AC a BD, ich priesečník označil P. Priesečník priamok AD a BC označil Q. Vyšlo mu, že $AB \perp PQ$. Je to náhoda?

2. Daná je kružnica k, jej priemer AB a bod C, ktorý neleží na priamke AB. Len s použitím pravítka bez rysky zostrojte priamku prechádzajúcu bodom C, kolmú na AB.

3. a) Fero narysoval štvoruholník, vyznačil stredy jeho strán a vyhlásil, že sú to vrcholy rovnobežníka. Má pravdu?
   b) Stredy strán ktorých štvoruholníkov sú vrcholmi štvorca (kosoštvorca, obdĺžnika)?

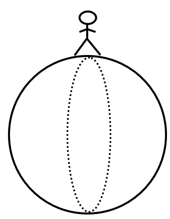
4. Stredná priečka lichobežníka je úsečka, ktorej krajné body sú stredmi ramien lichobežníka.
   a) Zistite dĺžku strednej priečky lichobežníka, ktorého základne majú dĺžky a, b.
   b) Určte dĺžku úsečky vyťatej uhlopriečkami na strednej priečke tohto lichobežníka.

5. Daný je trojuholník ABC. Čo je množina všetkých tých bodov D z roviny ABC, pre ktoré platí $S_{ABC} = S_{ABD}$?

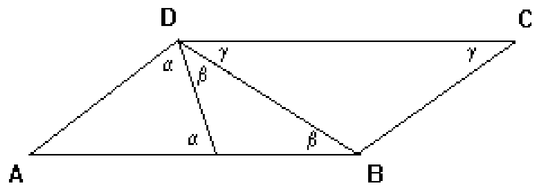
6. a) Fero zasa raz experimentoval, tentoraz opisoval kružnici štvoruholníky. Výsledkom jeho experimentovania bolo zopár tvrdení o takýchto štvoruholníkoch. Nanešťastie tu zaúradoval škriatok Škrtko a vymazal začiatok každej vety, ktorú Fero napísal.
   … protiľahlé uhly zhodné.
   … súčet veľkostí protiľahlých uhlov zhodný.
   … dve strany dĺžky a a ďalšie dve dĺžky b, $a \neq b$.
   … všetky strany rovnako dlhé.
   … súčet dĺžok protiľahlých strán rovnaký.
   … súčet veľkostí vnútorných uhlov 350^{o}.
   Ku každému z uvedených koncov viet doplňte niektoré z nasledujúcich začiatkov tak, aby výsledné tvrdenia boli pravdivé (uveďte všetky správne možnosti):
   V každom štvoruholníku je (sú) …
   V žiadnom štvoruholníku nie je (nie sú) …
   V niektorom štvoruholníku je (sú) …

   b) Riešte predchádzajúcu úlohu pre štvoruholníky vpísané do kružnice.

7. Malý Princ obišiel dookola svoju planétu tak, ako je nakreslené na obrázku. Jeho hlava pritom prešla dráhu o 200 π cm dlhšiu ako jeho nohy. Koľko meria Malý Princ?



8. Na obrázku je rovnobežník $ABCD$ rozdelený na tri rovnoramenné trojuholníky. Vypočítajte veľkosti uhlov α, β, γ.



9. a) Fero a Janka riešili nasledujúcu úlohu:
   Daná je priamka p a 2 rôzne body A, B, ktoré ležia v tej istej polrovine ohraničenej priamkou p a neležia na priamke p. Zostrojte bod X na priamke p, pre ktorý je súčet $|AX| + |BX|$ minimálny.
   Fero navrhuje bodmi A, B viesť kolmice na p, ich prieniky s p označí A', B'. Bod X bude podľa neho stredom tejto úsečky.
   Jankino riešenie je takéto: Nájdem stred úsečky AB, vediem ním kolmicu na p a priesečník tej kolmice s priamkou p bude hľadaný bod X. Posúďte ich riešenia.

   b) Nech KLM je ostrý uhol, A jeho vnútorný bod. Na polpriamke LK zvoľte bod B a na polpriamke LM bod C tak, aby $|AB|+|AC|+|BC|$ bolo minimálne.

   c) Jedny prázdniny strávil Fero v Kocúrkove. Kocúrkovčania chceli postaviť most cez rieku, ktorá oddeľuje ich mestečko od Zvonodrozdova. Most mal byť kolmý na brehy rieky, ktoré sú rovnobežné. Nevedeli sa však dohodnúť, na ktorom mieste most postaviť, aby cesta spájajúca obe mestá bola čo najkratšia a nakoniec ho vôbec nepostavili. Na ktorom mieste ho mali postaviť?

*10. Existuje trojuholník s dvoma výškami dlhšími ako 1 m a obsahom menším ako 1 cm^2?

*11. Z rovnakých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov zložte konvexný
- štvoruholník
- šesťuholník
- osemuholník
- päťuholník
- sedemuholník
- deväťuholník

Snažte sa útvary poskladať z čo najmenšieho počtu trojuholníkov.

*12. Základnými prvkami trojuholníka sú jeho strany a vnútorné uhly. V koľkých základných prvkoch sa môžu zhodovať dva trojuholníky, ktoré nie sú zhodné?

*13. Konvexný štvoruholník má obsah 1. Akú najmenšiu dĺžku môže mať jeho uhlopriečka?