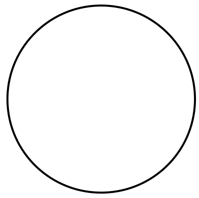
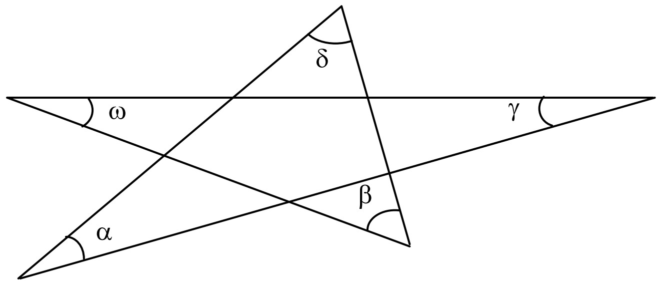
1. Uhly

1. Ktoré z nasledujúcich objektov môžu byť prienikom dvoch uhlov? Zdôvodnite.
   a) bod
   b) úsečka
   c) polpriamka
   d) priamka
   e) trojuholník
   f) štvoruholník
   g) päťuholník
   h) sedemuholník
   i) polrovina
   j) rovina

2. Bez pomoci uhlomera spravodlivo rozdeľte tortu na obrázku medzi:
   a) Snehulienku a sedem trpaslíkov,
   b) tri gaštanové kone,
   c) päť prštekov.



3. Zistite (presne) súčet uhlov α, β, γ, δ, a ω znázornených na obrázku.

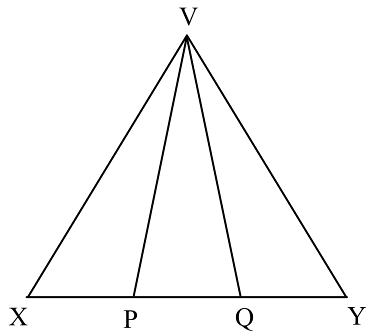


4. Daný je štvorec *ABCD* a bod *E* ležiaci v jeho vnútri. Zistite $|\sphericalangle DEC|$, ak viete, že trojuholník *ABE* je rovnostranný.

5. Zuzana narysovala niekoľko konvexných mnohouholníkov. Tvrdila, že sú medzi nimi aj štvoruholník s tromi ostrými uhlami, päťuholník so štyrmi ostrými uhlami a šesťuholník so štyrmi ostrými uhlami. Mohla hovoriť pravdu? Zdôvodnite.

6. a) Narysujte dvanásťuholník, ktorého všetky vnútorné uhly sú pravé.
   b) Narysujte dvanásťuholník, ktorého každé dve susedné strany sú na seba kolmé.
   c) Narysujte dvanásťuholník, ktorého každé dve susedné strany sú na seba kolmé a rovnako dlhé.

7. a) Narysujte uhol s veľkosťou 30° a bez pomoci uhlomera ho rozdeľte na tri rovnako veľké uhly.
   b) Na základni rovnoramenného trojuholníka *XYV* sme zvolili body *P* a *Q* tak, že $|XP| = |PQ| = |QY|$. Čo platí pre veľkosti konvexných uhlov *PVX*, *PVQ* a *QVY*? Vysvetlite.



2. Trojuholník

1. O istom trojuholníku vieme, že stred kružnice mu opísanej leží na jednej z jeho strán a dve z jeho ťažníc majú rovnakú dĺžku. Akú veľkosť má najmenší vnútorný uhol tohto trojuholníka?

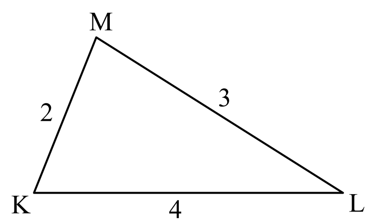
2. Na obvode trojuholníka *KLM* leží taký bod *X*, pre ktorý platí $|KX| = |LX| = |MX|$. Ktoré z týchto vlastností môže mať trojuholník *KLM*? Je:
   a) rovnostranný b) rovnoramenný c) ostrouhlý
   d) tupouhlý e) pravouhlý

3. Dokážte, že v každom trojuholníku platí:
   a) $2t_c < a + b$ b) $t_a + t_b > \frac{3}{2}c$

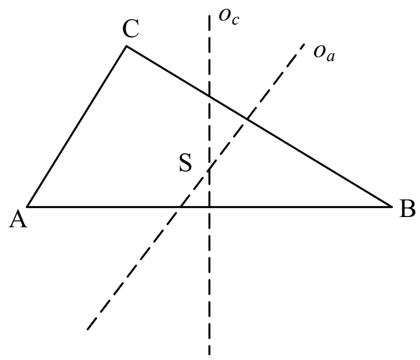
4. Dokážte, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode a ťažisko delí každú ťažnicu na dve časti v pomere 1 : 2.

5. Je pravda, že v každom trojuholníku leží oproti väčšiemu uhlu dlhšia strana? Vysvetlite.

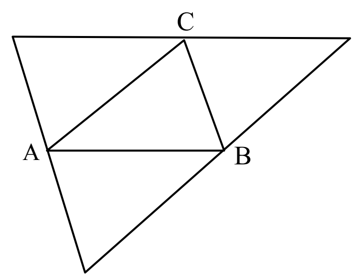
6. Trojuholník *ABC* je podobný s trojuholníkom *KLM* znázorneným na obrázku. Zistite, v akom pomere sú obsahy trojuholníkov *ABO*, *BCO* a *CAO*, kde *O* je stred kružnice vpísanej trojuholníku *ABC*.



7. a) Martin mal za úlohu dokázať, že osi strán trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Narysoval si trojuholník *ABC* (pozri obrázok) a dve z jeho osí strán, o_a, o_c. Ich priesečník označil *S*.
   Ďalej uvažoval takto: Každý bod na osi úsečky je rovnako vzdialený od oboch koncových bodov tejto úsečky. Keďže bod $S \in o_a$, tak platí $|SC| = |SB|$. Platí ale aj $|SA| = |SB|$ ($S \in o_c$). To znamená, že bod *S* je rovnako vzdialený aj od ...
   Dokončite jeho úvahu.



   b) Podobným spôsobom ukážte, že aj osi uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.
   c) Dokážte, že výšky trojuholníka (*ABC*) sa pretínajú v jednom bode, ortocentre. Pomôže vám, ak si nakreslíte takýto obrázok a využijete úlohu a).



3. Mnohosteny
Voľné rovnobežné premietanie

1. Ak sa dá, znázornite 3-, 4-, 5-, 6-, 7-, 8-sten.

2. Existuje mnohosten, ktorý má 11 vrcholov a z každého vrcholu vychádza 7 hrán?

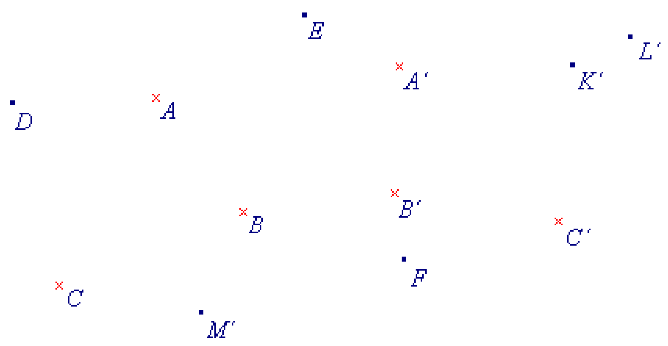
3. Dokážte, že neexistuje mnohosten so siedmimi hranami.

4. Vo vrchole telesa sa stretávajú 3 zhodné pravidelné mnohouholníky. Koľko uholníky to môžu byť?

5. Koľko najviac stien môže mať mnohosten s 20 hranami?

6. Pokúste sa načrtnúť všetky pravidelné mnohosteny. Často sa im hovorí aj Platónske telesá.

7. Vo VRP sú zobrazené body *A, B, C* do bodov *A´, B´, C´*.
   a) Zobrazte v danom VRP body *D*, *E*, *F*.
   b) Nájdite v danom VRP vzory bodov *K´*, *L´*, *M´*.
   c) Bez narysovania bodov *P, Q, R, S* zostrojte ich obrazy v danom VRP ak viete: *P* je stred *AB*. *Q* je stred *BC*. *R* je stred *PQ*.
   $RS \parallel AB \wedge |RS| = |AB|$



8. Vo VRP zobrazte
   a) kocku
   b) pravidelný 4-sten
   c) pravidelný 5-boký kolmý hranol
   d) pravidelný 4-boký šikmý hranol

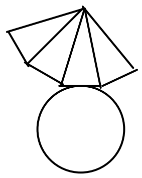
9. Zistite, či nasledujúce body ležia v jednej rovine:
   a) *K, L, M*
   b) *K, L, M, G*
   c) *K, L, N, O*
   d) *K, L, M, N, O, P*
   e) *L, C, F, E.*
   Body *K, L, M, N, O, P* sú po rade stredy hrán *EA, AB, BC, CG, GH, HE* kocky *ABCDEFGH.*

10. a) Môže byť rezom kocky 3-, 4-, 5-, 6-, 7-uholník?
    b) Môže byť rezom kocky *pravidelný* 3-, 4-, 5-, 6-, 7-uholník?
    c) Môže byť rezom pravidelného štvorstena 3-, 4-, 5-uholník?

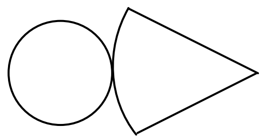
4. Stereometria I

1. Na ktorých z nasledujúcich obrázkov určite nie je znázornená sieť žiadneho telesa? Vysvetlite, prečo.

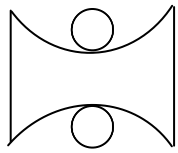
a)



b)

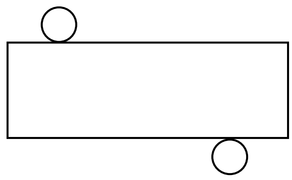


c)



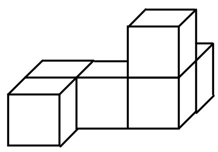
d)

e)



2. Štyri rovnako veľké hracie kocky sme zlepili celými stenami k sebe tak, že vzniklo jedno teleso. Zistite, aký
   a) najväčší
   b) najmenší
   počet bodiek mohlo mať na povrchu.

3. Znázorňovať kockové telesá nie je ľahké, niekedy sa namiesto rovnobežného premietania používajú rôzne kódovania, napr.:



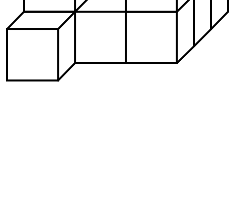
kockové teleso

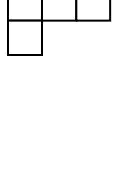
		1
1	1	1,2
1		

   a) Vysvetlite princíp tohto kódovania.
   b) „Zakódujte“ uvedenými spôsobom telesá.
   c) Dá sa každé kockové teleso takto zakódovať?

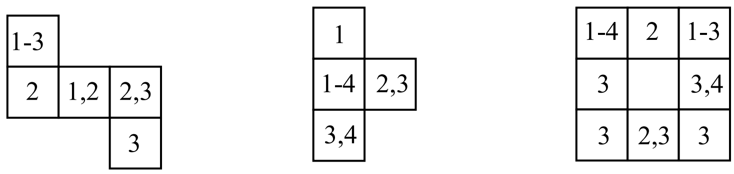
   (Pozn. Kockové telesá sú telesá zložené z rovnako veľkých kociek, pričom kocky prikladáme k sebe celými stenami.)

4. a) Majka postupne kreslila, ako vidí teleso na obrázku pri pohľade spredu (nárys), zhora (pôdorys) a zboku (bokorys). Ktorý z uvedených obrázkov nakreslila ako prvý a ktorý ako posledný?

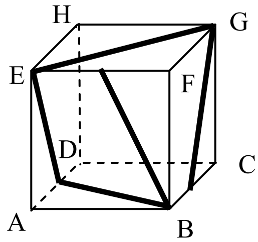


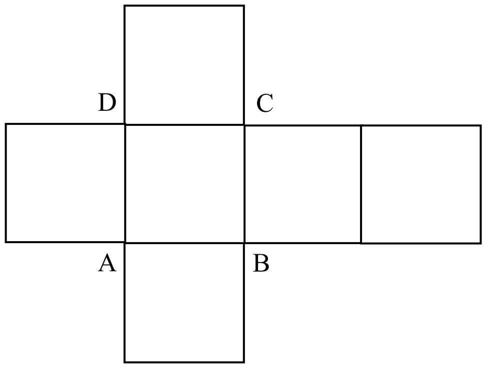


b) Nakreslite nárys, bokorys a pôdorys každého z nasledujúcich telies:



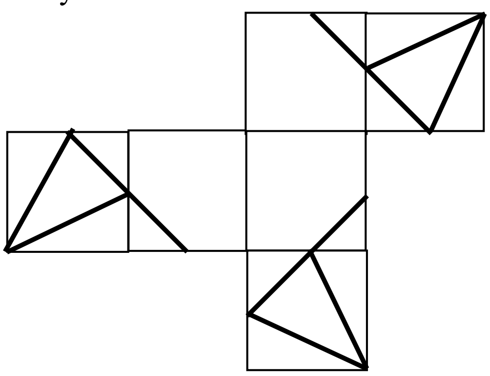
5. a) Na povrchu priehľadného modelu kocky je nakreslená lomená čiara. Krajné body úsečiek tvoriacich čiaru sú buď vrcholy kocky alebo stredy jej hrán. Zakreslite čiaru do uvedenej siete kocky.





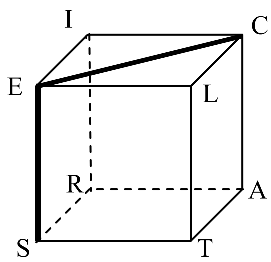
b) Nájdite takú sieť kocky, v ktorej bude zakreslená čiara z úlohy a) súvislá.

6. Maroš vystrihol z papiera sieť kocky. Jeho nezbedný brat Miloš mu však sieť pokreslil tak, ako ukazuje nasledovný obrázok:



Maroš potom zo siete poskladal model kocky tak, aby čiary boli na vnútornej strane stien. Papier však bol príliš tenký a Milošove čiary presvitali. Znázornite obraz Marošovho modelu vo voľnom rovnobežnom premietaní aj s presvitajúcimi čiarami.

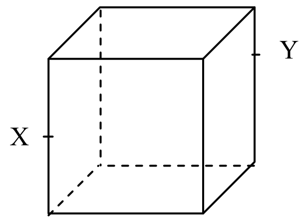
7. Pavúky Hubert, Hugo a Henrich sú trojičky, preto nečudo, že všetky tri bežia rovnako rýchlo. Raz súťažili v špeciálnej atletickej disciplíne – behu po povrchu kocky.



a) V prvých pretekoch vybehli súčasne z bodu *S* a súčasne aj dobehli do bodu *C*, každý z nich však bežal po celkom inej dráhe. Na obrázku je znázornená dráha pavúka Huga. Znázornite aspoň 4 rôzne dráhy, po ktorých mohli bežať Hubert a Henrich.

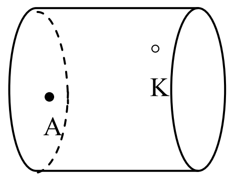
b) V druhých pretekov vyštartovali súčasne z bodu *S* a vyhral ten, ktorý ako prvý dobehol do bodu *C*. Hugo bežal po tej istej dráhe ako v prvom preteku. Mali Hubert a Henrich šancu dobehnúť do cieľa skôr ako Hugo? Vysvetlite.

8. V ďalších pretekoch pavúky štartovali zo stredu jednej z hrán kocky (bod *X*), cieľ ležal v hornej štvrtine protiľahlej hrany (bod *Y*) – pozri obrázok. Henrich bežal najkratšou možnou trasou spájajúcou body *X*, *Y* po prednej a bočnej stene kocky, Hugo zasa najkratšou možnou trasou spájajúcou body *X*, *Y* po prednej, hornej a zadnej stene kocky. Víťazom pretekov sa však stal Hubert.



   a) Na kocke presne zakreslite trasy, po ktorých bežali Henrich a Hugo.
   b) Ktorý z pavúkov obsadil v týchto pretekoch vyššiu priečku – Henrich alebo Hugo?
   c) Znázornite na kocke trasu, po ktorej mohol bežať Hubert.

9. Na smetisku leží stará plechová rúra tvaru valca. Na vonkajšej stene rúry žije hrdzotoč Antónius a na vnútornej hrdzotočka Kleopatra. Náš fotograf Cézar ich zachytil v okamihu, keď si Antónius uvedomil, že bez Kleopatry už nemôže žiť (pozri obrázok).



   Poraďte mu, kadiaľ má ísť (len po stenách rúry), aby už zbytočne nestratil ani sekundu.

10. Malý Jurko často privádza učiteľa matematiky do zúfalstva svojimi „existenčnými" otázkami. Chce napríklad vedieť, či existuje:
   a) hranol s aspoň dvoma nezhodnými stenami, ktorého všetky hrany sú navzájom zhodné.
   b) hranol, ktorého všetky steny sú navzájom zhodné mnohouholníky, hoci aspoň 2 z jeho hrán majú rôznu dĺžku.
   c) mnohosten, ktorý má stien rovnako veľa ako vrcholov.
   d) štvorsten s aspoň dvoma nezhodnými stenami, ktorého každé dve protiľahlé hrany sú rovnako dlhé.

   Pokúste sa odpovedať na tieto otázky.

5. Logika II

1. Jeden kráľ mal troch synov. Nechcel, aby sa o vládu po jeho smrti delili, a tak sa rozhodol, že žezlo odovzdá do rúk toho najmúdrejšieho. Vyhútal pre nich skúšku, v ktorej bude môcť každý svoju múdrosť prejaviť. Zobral tri biele a tri čierne čiapky, zaviedol synov do tmavej miestnosti, posadil ich tak, aby každý z nich videl na ostatných dvoch a každému nasadil na hlavu čiapku tak, aby syn nevedel, akej farby je jeho čiapka. My vieme, že všetky nasadené čiapky boli biele. Synovia dostali pokyn zdvihnúť ruku v prípade, že uvidia aspoň jednu bielu čiapku, a povedať o situácii čo najviac na základe svojho úsudku. Na vlastnú čiapku si pritom nevideli. Kráľ osvetlil miestnosť. Všetci synovia zdvihli ruku a po chvíli jeden z nich povedal: „Ja mám tiež bielu čiapku“. Kráľ dal kráľovstvo práve tomuto synovi. Na základe čoho tento syn logicky usúdil, že má bielu čiapku?

2. Zvieratká v ZOO mali každé svoje meno a každé malo rado len jeden druh zeleniny. Samuel ochotne prenechával kapustu hrochovi a pochutnával si na mrkve. Slon sa vždy čudoval, ako môže Bondymu chutiť kel. Orangután sa volal Digi. Čo je obľúbenou pochúťkou zubra, ktoré zviera sa volá Herodes a ktoré zo zvierat má najradšej reďkovky?

3. Predstavte si, že sú pred vami 3 mince. Zlatá, strieborná a medená. Ak poviete pravdivý výrok, dostanete jednu mincu, nikto však nestanovil ktorú. Ak poviete nepravdivý výrok, nedostanete nič. Ktorý výrok vám zaručí zisk zlatej mince?

4. Učiteľ matematiky chcel netradičným spôsobom odmerať študentom čas na test v dĺžke 15 minút. Na odmeranie 15 minút použil len presýpacie hodiny, ktoré sa presypú presne za 7 minút a druhé presýpacie hodiny, ktoré sa presypú presne za 11 minút, pričom presýpacie hodiny obrátil za celý čas merania len 3-krát. Vysvetlite, ako učiteľ odmeral 15 minút.

5. Vašou úlohou je presne odmerať čas 45 minút, ak nemáte k dispozícií nič iné len dve zápalné šnúry a zápalky, ktorými šnúry môžete zapáliť. Zápalné šnúry, ktoré máte k dispozícií majú nasledujúce vlastnosti:
   1. Zápalné šnúry sú spletené z rôznych materiálov, ktoré nehoria rovnakou rýchlosťou, takže začiatok šnúry môže horieť rýchlejšie, po chvíľke sa môže horenie spomaliť a následne opäť zrýchliť.
   2. Každá zo šnúr horí od zapálenia jedného konca až po dohorenie na druhom konci šnúry presne jednu hodinu.
   3. Zápalné šnúry sú také rozdielne, že ak začiatky oboch šnúr zapálite naraz, tak napr. po 10 minútach každá z nich horí v inej vzdialenosti od zapáleného začiatku.

   Svoj spôsob merania 45 minút opíšte.

Na ostrove Pravdoklam žijú dva druhy ľudí – Poctivci, ktorí stále hovoria pravdu a Klamári, ktorí stále klamú. V nasledujúcich úlohách zistite, ktorí z účastníkov sú Klamári a ktorí Poctivci.

6. Na trhu sa hádajú traja obyvatelia A, B a C. Ide okolo nich cudzinec a opýta sa A: „Ste klamár alebo poctivec?" A odpovie, ale nezrozumiteľne, takže cudzinec nerozumel, čo povedal. Preto sa opýta cudzinca B: „Čo povedal A?"
   B odpovie: „A hovoril, že je klamár." Na to tretí, C, povie: „Neverte B, ten klame!"
   Čo sú B a C?

7. Trochu ďalej stretne cudzinec ďalších dvoch domorodcov. Prvý mu povie: „Som klamár alebo ten druhý je poctivec." Čo sú zač?

8. Náš cudzinec sa dotieravými otázkami znepáčil panovníkovi ostrova, a ten ho odsúdil na smrť. Dal mu však veľkoryso možnosť zachrániť sa.
   Ukázal mu dvoje dvere - jedny viedli na popravisko a druhé na slobodu (nedali sa rozpoznať) a iba strážcovia dverí vedeli, ktoré kam vedú. Panovník dovolil cudzincovi položiť jednému zo strážcov jednu otázku. A pretože panovník bol poctivec a k tomu aj spravodlivý, varoval odsúdeného, že medzi strážcami je práve jeden klamár.
   Akou otázkou si možno v tomto prípade zachrániť život?

9. Katka, Samko a Filip majú radi čokoládu. Mamke vzali a zjedli päť čokolád, čo mala na varenie. Keď mamka zisťovala, kto jej ich zjedol, deti povedali:
   Katka: „Nezjedla som žiadnu čokoládu.“
   Samko: „Ani ja som nezjedol žiadnu čokoládu.“
   Filip: „Ja som tiež nezjedol žiadnu čokoládu.“
   Katka: „Samko zjedol viac ako Filip.“
   Samko: „Katka v predchádzajúcej vete klame.“
   Filip: „Katka so Samkom zjedli všetko.“
   Katka: „Filip v predchádzajúcej vete klame.“
   Keď sa deti napokon priznali, zistilo sa (o týchto 7 tvrdeniach), že každý klamal toľkokrát, koľko čokolád zjedol. Koľko čokolád zjedol každý z nich?

10. Montér Paľo má nemalý problém. Natiahol cez rieku 7 káblov a až teraz si všimol, že si ich zabudol označiť. Samozrejme, potrebuje vedieť, ktorý je ktorý a onačiť ich číslami od 1 do 7 na oboch koncoch, aby dva konce jedného káblu mali rovnaké číslo. K dispozícii má len zdroj napätia na jednej strane rieky, skúšačku (prístroj, ktorý po priložení zasvieti, aj je kábel pod prúdom) a čln. Na minimálne koľko preplávaní rieky vie správne označiť káble?

11. Traja zlatokopi nazhromaždili kopu bohatstva a teraz si ho idú rozdeliť. Zlato sa ale od oka ťažko delí a je dôležité, aby bolo rozdelené spravodlivo. Keď boli dvaja, delili sa tak, že jeden rozdelil kopu na dve podľa neho rovnaké a druhý si zobral tú, čo sa mu zdala väčšia. Tak sa necítil nik ukrivdený. Ako majú ale tento problém riešiť traja? (Navrhnite systém, aby mal na konci každý z nich pocit, že dostal minimálne tretinu)

6. Matematická indukcia

1. Dokážte nasledujúce rovnosti:
   a) $\forall n \in N: \frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$
   b) $\forall n \in N: \frac{1}{4.8}+\frac{1}{8.12}+\frac{1}{12.16}+\ldots+\frac{1}{4n(4n+4)}+\frac{1}{16(n+1)}=\frac{1}{16}$
   c) $\forall n \in N: \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}, \sin x \neq 0$

2. Dokážte nasledujúce nerovnosti:
   a) $\forall n \geq 4: n! > 2^n$
   b) $\forall n > 1: n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
   c) $\forall n \in N: \binom{2n}{n}.\sqrt{3n+1} \leq 4^n$

3. Koľkými spôsobmi možno pokryť domino-kockami „šachovnicu“ rozmeru $2 \times n$? Svoje tvrdenie dokážte.

4. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = a$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - 2)$ má vzorec pre n-tý člen $a_n = (a+1)3^{1-n} - 1$.

5. Nájdite vzorec pre n-tý člen postupnosti danej rekurentne $a_1 = 1, a_2 = 7$ a $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} + 8$. Dokážte platnosť vášho vzorca.

6. Vyslovte hypotézu pre daný súčet a dokážte ju: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}$, $n \in N$.

7. Rovnice a nerovnice

1. Riešte v R rovnice:
   a) $x^5 = x$ b) $x^4 + x = 0$ c) $\dfrac{2}{x^2 - x + 1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x-1}{x^3+1}$

   d) $x^3 + 7x^2 - 8 = 0$ e) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ f) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

   g) $\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + x + 1\right) + 3 = 0$ h) $\left(x^2 + x + 1\right) \cdot \left(x^2 + x + 2\right) = 12$

2. Riešte v R nerovnice:
   a) $(x - 2)\sqrt{x^2 + 1} > x^2 + 2$ b) $\sqrt[3]{x+1} \geq x - 5$ c) $\sqrt{2x+6} < \sqrt{3-5x}$

   d) $\sqrt{2 - x^2} > -1$ e) $\sqrt{x^2} > 2$ f) $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)(5 - \sqrt{x}) > 0$

3. Pre ktoré a $\in$ R je prienikom riešení nerovníc $\sqrt{-x+3} \geq a$, $\sqrt{x-3} \leq a$ neprázdna množina?

4. Čo možno doplniť do nerovnice $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{?}$, ak viete, že jediným riešením je číslo 2.

5. Ktoré z daných výrazov delia mnohočlen $2x^5 - x^4 - 15x^3 + 19x^2 + x - 6$
   a) $\left(x^2 - 4\right) \cdot (x - 1)$
   b) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

6. Vhodnou substitúciou vyriešte rovnice:
   a) $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$ b) $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$

   c) $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$ d) $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x$

7. Riešte v R rovnice
   a) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 - \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 = \dfrac{3}{2}$ b) $\left(2x^2 - 3x + 1\right) \cdot \left(2x^2 + 5x + 1\right) = 9x^2$

   c) $(x+2) \cdot (x+4) \cdot (x+6) \cdot x = 9$ d) $(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+8) \cdot (x+12) = 4x^2$

   e) $(x+2) \cdot (x-3) \cdot (x+1) \cdot (x+6) = -96$

   f) $\left(3x^2 + 7x - 2\right)^2 + 5x^2 \cdot \left(3x^2 + 7x - 2\right) - 24x^4 = 0$

8. Janka a Mišo dokazovali nerovnosť $\forall$ x, y $\in$ R^+: $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$. Janka túto nerovnosť umocnila, Mišo úlohu dokazoval pomocou Euklidovej vety o výške. Pokúste sa zopakovať ich postupy

8. Sústavy rovníc II

1. Riešte v reálnych číslach sústavy rovníc o dvoch neznámych

   a) $\dfrac{3x}{7-y}=1$, $\dfrac{4}{y+2x}=1$ b) $\dfrac{x+3}{4-y}=\dfrac{1-x}{y-2}$, $\dfrac{2x-3}{5y-2}=1$ c) $\dfrac{x+3}{1-x}=\dfrac{4-y}{y-2}$, $\dfrac{1}{5y-5}=\dfrac{1}{2x-6}$

2. Zistite súradnice priesečníkov priamky a krivky danej rovnicou

   a) $p: x-y=3,\ \ k: x^2+y^2=65$

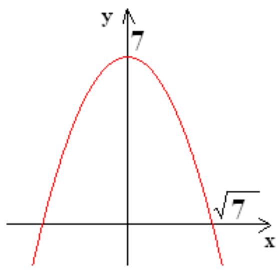
   b) $p: 2y+x=12\ \ k: y^2+yx=35$

3. Riešte v R sústavy rovníc:

   a) $2^x+2^{2-y}=16$, $(x+y)^3=8$ b) $x^3+y^3=56$, $2^{x+y}=4$

4. Janko našiel v otcovej knižnici starú učebnicu matematiky. Jedným z príkladov bola takáto sústava (časť prvej rovnice bola už nečitateľná): $\begin{aligned} &xy+ \\ &x^2y+xy^2=30\end{aligned}$. Namiesto prvej rovnice bolo ďalej napísané $a+b=11$ namiesto druhej $ab=30$. Viete, ako vyzerala prvá rovnica pôvodnej sústavy? Doriešte túto sústavu.

5. Nájdite súradnice priesečníkov grafu funkcie $f: y=\dfrac{12}{x^2}$ s parabolou znázornenou na obrázku.



6. Riešte kvadratické rovnice s neznámou x a parametrom y:

   a) $x^2-9y^2=0$

   b) $x^2-4y^2=1$

   c) $x^2-6y+9y^2=-1$

7. Vyjadrite z rovníc uvedených v predchádzajúcej úlohe neznámu y.

8. Filip rád vyrába nové, „krajšie“ rovnice. Keď sa mu nehodí „sčítanie“, skúsi ich odčítať, niekedy dokonca aj vynásobí alebo vydelí jednu rovnicu druhou.
   Na čo si pri tom musí dávať pozor?
   Ako by asi Filip riešil nasledujúce sústavy rovníc?

   a) $\begin{aligned} x-x^3y^3-y+1&=0\\ x-x^3-y+1&=0\end{aligned}$ b) $\begin{aligned} (x-3y)(2x+y)&=-66\\ (x-3y)(x-y)&=33\end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x^2+y^2&=2x\\ x^2+y^2&=y+4\end{aligned}$

9. Kombinatorika II

1. V tabuľke 4x4 zafarbite 4 políčka na modro tak, aby v každom stĺpci, riadku a na každej uhlopriečke bolo najviac 1 modré políčko. Koľkými spôsobmi sa to dá spraviť?

2. V školskom bufete predávajú dva druhy pečiva, dva druhy ovocia, dva druhy jogurtov a dva druhy ochuteného mliečka. Katka sa rozhodla, že si každý deň kúpi na desiatu jeden kus ovocia, jogurt, jedno pečivo a mliečko, vždy ale inú „kombináciu“. Ako dlho sa jej to môže dariť? Aby v tom nemala zmätok, začala si robiť takúto tabuľku:

Rožok	Ovocie	Mliečko	Jogurt
1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	2	1
1	1	2	2

Dokončite Katkinu tabuľku.
Ako by táto tabuľka vyzerala, keby v bufete mali
a) len jeden druh ovocia
b) tri druhy ovocia
c) štyri druhy ovocia?

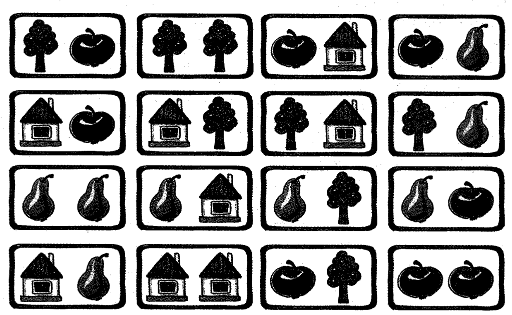
3. Ignác a Qido hrajú nasledujúcu IQ hru: V pravidelnom 8-uholníku ABCDEFGH s vyznačenými uhlopriečkami striedavo kreslia také cesty vychádzajúce z vrcholu A, ktoré prechádzajú každým jeho vrcholom práve raz. Prehráva ten z nich, ktorý nemôže, nevie alebo nechce nakresliť takú cestu, ktorá ešte nie je v obrázku vyznačená. Pre ktorého z nich existuje vyhrávajúca stratégia? Po koľkých krokoch (najneskôr) zvíťazí?

4. Koľkými spôsobmi môžeme na šachovnici 8 x 8
a) vybrať tri políčka tak, aby neboli všetky v tom istom stĺpci?
b) Umiestniť 8 dám tak, aby sa neohrozovali?

5. Na krúžku, na ktorý chodieva 6 detí, sa rozhodli usporiadať turnaj v piškvorkách. Turnaj sa bude hrať systémom každý s každým, pričom chceme, aby:
a) každé dieťa odohralo denne nanajvýš jeden zápas sa celý turnaj odohral za čo najmenší počet hracích dní.
b) Koľko hracích dní bude takýto turnaj trvať?
c) Je možné, aby každý hrací deň hralo každé dieťa práve jeden zápas? (Ak si myslíte, že áno, napíšte rozpis zápasov na jednotlivé dni, v opačnom prípade svoje tvrdenie dokážte.)

6. Uložte kartičky obrázkom nadol tak, aby ste o každej z nich vedeli povedať (bez toho, aby ste ju obrátili), aký obrázok je na nej nakreslený:

a)



b)

7. V Morseovej abecede sú písmená a číslice zakódované pomocou čiarok a bodiek. Koľko písmen možno zakódovať pomocou
   a) práve dvoch
   b) práve troch
   c) najviac štyroch znakov?

8. Na vrchol kopca vedú 4 značkované chodníky: modrý, žltý, červený a zelený. Koľkými spôsobmi môže Filip absolvovať výlet na vrchol a späť, ak nechce ísť dvakrát po tom istom chodníku?

10. Pravdepodobnosť I

1. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma kockami padne aspoň na jednej z nich 1?

2. Aký súčet by mal pri hode tromi kockami padať najčastejšie?

3. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode
   a) dvoma
   b) troma
   c) štyrmi
   Kockami padnú aspoň dve rovnaké čísla?

4. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma (tromi, štyrmi) mincami padne aspoň na dvoch minciach
   a) rub
   b) rovnaká strana – rub alebo líc ?

5. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma kockami bude absolútna hodnota rozdielu „padnutých“ čísel
   a) 2
   b) najviac 2
   c) aspoň 2?

6. Predstavte si, že máte všetky farebne odlišné kocky s jednou červenou, dvoma bielymi a tromi zelenými stenami. S akou pravdepodobnosťou bude mať kocka náhodne vybraná spomedzi nich biele steny oproti sebe?

7. Z bridžových (polovica žolíkových, ale bez žolíkov, tzn. 4x13 kariet) kariet vyberieme štyri karty. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú všetky esá?

8. V sklade je 1000 výrobkov rovnakého druhu, z toho 100 druhej akosti. Vyberieme náhodne 5 kusov. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú najviac dva druhej akosti?

9. V dedine je 50 mačiek. Všetky ostatné domáce zvieratá sú psy. Väčšina z nich je normálna, ale 10 % psov si o sebe myslí, že sú mačky a 10 % mačiek si o sebe myslí, že sú psy. Posledný prieskum ukázal, že 20 % všetkých zvierat si o sebe myslí, že sú mačky. Keď v dedine uvidíte nejaké zviera, aká je pravdepodobnosť, že to je mačka?

10. Aká je pravdepodobnosť, že na dvadsiatom mieste desatinného rozvoja čísla $\frac{1}{13}$ je cifra 6?

11. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolené prirodzené číslo menšie ako 100
    a) bude prvočíslo   b) nebude prvočíslo?

12. Myslím si nejaké dvojciferné číslo, ktorého
    a) cifry sú navzájom rôzne.
    b) prvá cifra je menšia ako druhá.
    c) prvá cifra je o tri väčšia ako druhá.

    S akou pravdepodobnosťou uhádnete toto číslo na prvý pokus?

13. Jakub poskladal na stole zo zápaliek trojuholník. Jednu stranu trojuholníka tvorilo 5 zápaliek, druhú stranu 8 zápaliek. Všetky zápalky boli rovnako dlhé. Aká je pravdepodobnosť, že tretia strana trojuholníka je zložená zo šiestich zápaliek?

14. Aká je pravdepodobnosť, že vyhrám prvú cenu v športke, ak podám jeden tiket?

15. Mirka s Ivkom našli na stole papier s narysovanou priamkou. Mirka povedala, že aj so zavretými očami sa jej podarí narysovať rovnobežku s touto priamkou. Ivko jej na to povedal, že pravdepodobnosť toho, že sa jej to podarí, je nula, a teda sa jej to nepodarí. Mirka mu povedala, že pravdepodobnosť toho, že sa jej to podarí, je naozaj nula, ale že aj tak sa jej to môže podariť. Kto má pravdu?