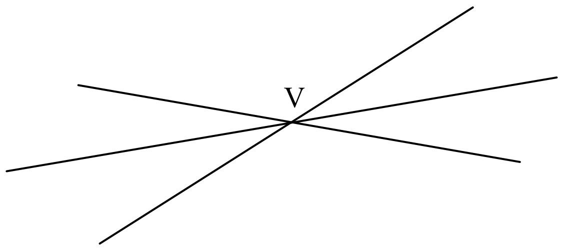
1. Uhly

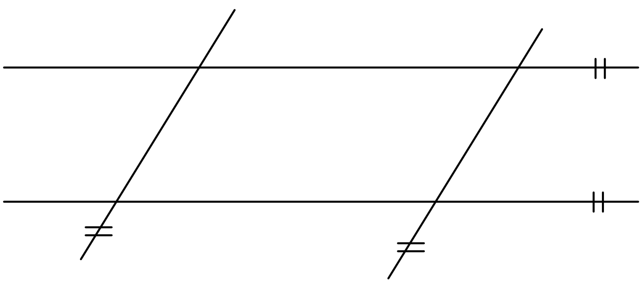
1. Soňa si myslí, že uhol, to sú vlastne dve polpriamky so spoločným začiatkom, podľa Peťa je to však ten oblúčik medzi nimi. Hela nesúhlasí ani s jedným z nich a tvrdí, že uhol, to sú tie dve polpriamky spolu s oblúčikom medzi nimi. Kto z nich má pravdu? Ako by ste definovali uhol vy?

2. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:
   a) Každý uhol je prienik nejakých dvoch polrovín.
   b) Každý uhol je časť roviny, ktorá sa nachádza medzi nejakými dvoma polpriamkami s tým istým začiatkom.
   c) Každý uhol je časť roviny, ktorá sa nachádza medzi nejakými dvoma polpriamkami s tým istým začiatkom spolu s týmito polpriamkami.
   d) Každý uhol je množina všetkých bodov nejakých dvoch polpriamok so spoločným začiatkom spolu so všetkými bodmi, ktoré ležia medzi týmito dvoma polpriamkami.
   e) Každý uhol je polrovina.
   f) Každá polrovina je uhol.
   g) Ľubovoľné dve polpriamky so spoločným začiatkom rozdelia rovinu na dva uhly.
   h) Ľubovoľné dve polpriamky so spoločným začiatkom rozdelia rovinu na dva uhly, z ktorých jeden je konvexný a druhý nekonvexný.
   i) Ľubovoľné dva uhly, ktoré majú spoločný vrchol a sú zhodné, sú vrcholové.
   j) Ak je uhol α súhlasný s uhlom β, potom uhol β je striedavý s vrcholovým uhlom k uhlu α.

3. a) Koľko dvojíc vrcholových a koľko dvojíc susedných uhlov je znázornených na obrázku? (Uvažujte len uhly s vrcholom V.)

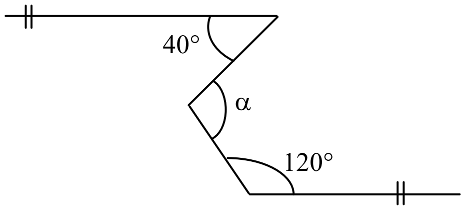


   b) Koľko dvojíc striedavých a koľko dvojíc súhlasných uhlov je znázornených na obrázku?

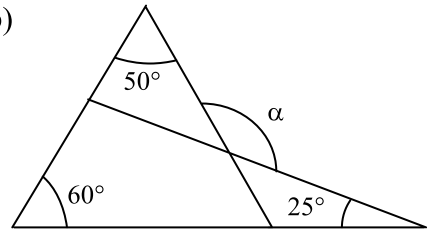


4. Určte veľkosť uhla α.

a)



b)



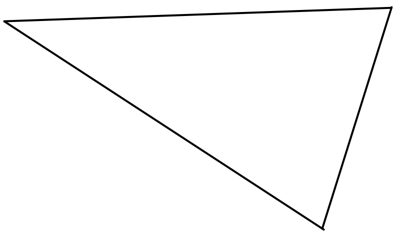
5. Rysujte podľa návodu:
   1. $\sphericalangle AVB$; $|\sphericalangle AVB| = 75°$
   2. k; $k\,(V;\,4\text{ cm})$
   3. X; $X \in k \cap \overrightarrow{VA}$
   4. Y; $Y \in k \cap \overrightarrow{VB}$
   5. o; $o \perp XY \wedge V \in o$
   6. S; $S \in o \cap XY$

   Čo platí pre veľkosti konvexných uhlov AVS a BVS? Prečo?

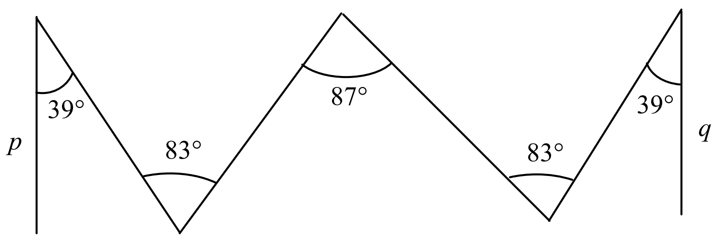
6. Bez použitia uhlomera narysujte uhly o veľkosti 75°, 210°, 345°, 225°, 157°30`.

7. Edita si oxeroxovala učebnicu matematiky so zmenšením na 75 % pôvodnej veľkosti. V učebnici bol aj uhol α s veľkosťou 60°. Akú veľkosť má uhol α na Editinej kópii?

8. Len pomocou kružidla zistite, či je trojuholník na obrázku rovnoramenný a či má jeho najmenší uhol veľkosť 40º.

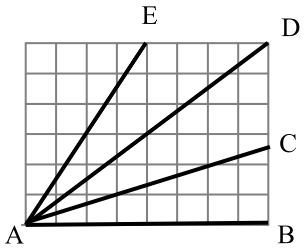


9. Zistite, či sú priamky p a q rovnobežné.

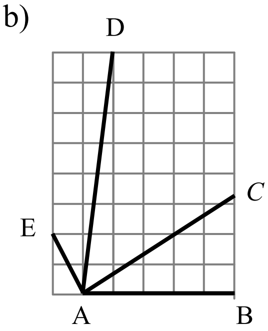


*10. Je pravda, že $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DAC|$ a $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EAD|$? Vysvetlite.

a)



b)



*11. Pravidelné 3-, 4-, 5-, 6- a 8-uholníky sa dajú („presne“) narysovať aj bez pomoci uhlomera, pravidelné 7- a 9-uholníky nie. Zistite, ktoré z nasledujúcich mnohouholníkov sa nedajú („presne“) narysovať bez pomoci uhlomera:
10-, 12-, 14-, 15-, 18-, 20-, 35-, 45-, 90-, 120-uholník.

*12. Pravouhlé trojuholníky ABC, kde α je 30°, 60°, 45° alebo aj 72° vieme „presne“ narysovať aj bez použitia uhlomera. Pre ktoré z nasledujúcich uhlov α taký trojuholník bez použitia uhlomera narysovať nevieme?

a) 10°
b) 20°
c) 40°
d) 9°
e) 5°
f) 36°
g) 24°
h) 8°
i) 4°
j) 3°
k) 33°

Vysvetlite prečo.

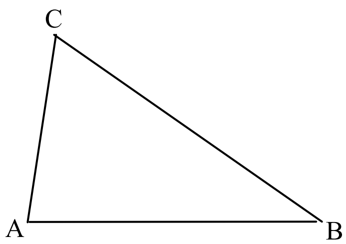
2. Trojuholník

1. Ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé? K nepravdivým nájdite kontrapríklad.
   a) Všetky vnútorné uhly ostrouhlého trojuholníka sú ostré.
   b) Všetky vnútorné uhly tupouhlého trojuholníka sú tupé.
   c) Tupouhlý trojuholník nemôže byť rovnoramenný.
   d) Rovnostranný trojuholník nemôže byť tupouhlý.
   e) Rovnoramenný trojuholník nemôže byť pravouhlý.
   f) Každý rovnoramenný trojuholník má práve dva ostré uhly.
   g) Každý tupouhlý trojuholník je rovnoramenný.

2. Dokončite nasledujúce tvrdenia:
   a) Ak sú v trojuholníku všetky výšky totožné s ťažnicami, potom je tento trojuholník...
   b) Ak je v trojuholníku aspoň jedna výška totožná s ťažnicou, potom je tento trojuholník...
   c) Ak sú dva vnútorné uhly v trojuholníku zhodné, potom je tento trojuholník...
   d) Ak v trojuholníku splýva os strany s osou uhla, potom je tento trojuholník...
   e) Ak v trojuholníku výška rozdeľuje stranu na dve zhodné časti, potom je tento trojuholník...

3. Zistite obvod trojuholníka, ak viete, že dve z jeho strán sú dlhé 1,2 cm a 8,3 cm a dĺžka tretej strany vyjadrená v cm je nepárne číslo.

4. a) Trojuholník *ABC* znázornený na obrázku rozdeľte na štyri zhodné trojuholníky (*AKM*, *BKL*, *CLM*, *KLM*).
   b) Ukážte, že štvoruholníky *AKLM*, *BLMK* a *KLCM* sú rovnobežníky.
   c) Zistite súčet obvodov rovnobežníkov z úlohy b) ak viete, že trojuholník *ABC* má obvod 11 cm.
   d) Zistite obsah a obvod trojuholníka *KLM* ak viete, že obsah trojuholníka *ABC* je 18 cm^2 a obvod 20cm.



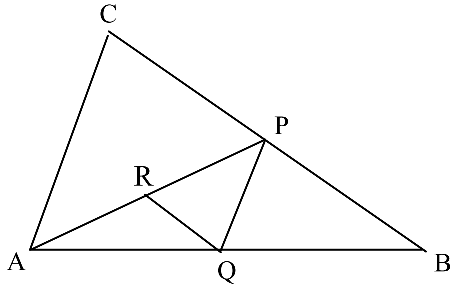
5. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení. V prípade, že nie sú pravdivé, opravte ich tak, aby boli:
   a) Stredná priečka trojuholníka je spojnica stredov dvoch strán trojuholníka.
   b) Stredná priečka trojuholníka delí trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1:4.
   c) Každá úsečka, ktorá delí trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1 : 3, je strednou priečkou tohto trojuholníka.
   d) Úsečka, ktorá delí trojuholník na trojuholník a lichobežník tak, že tieto sa zhodujú vo výške, je strednou priečkou trojuholníka.

6. a) Ktorý z nasledujúcich vzťahov platí v pravouhlom trojuholníku *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C*?

$$c = 2t_c \qquad c = \frac{1}{2}t_c \qquad c = t_c \qquad c = t_c \cdot \sqrt{2}$$

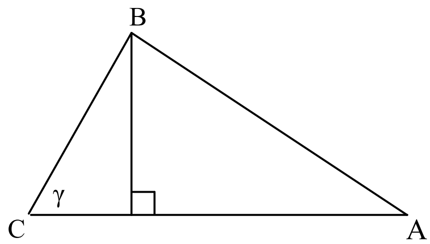
b) Pravouhlý trojuholník má preponu dlhú 12 cm. Vypočítajte vzdialenosť ťažiska tohto trojuholníka od stredu kružnice opísanej tomuto trojuholníku a presne popíšte polohu ortocentra v tomto trojuholníku.

7. V situácii znázornenej na obrázku platí:
AP je ťažnica trojuholníka *ABC*, *PQ* je ťažnica trojuholníka *APB*, *QR* je ťažnica trojuholníka *APQ*. Zistite obsah trojuholníka *PQR* ak viete, že obsah trojuholníka *ABC* je 24 cm^2.



8. V trojuholníku *ABC* je bod *S* stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Platí: $|\sphericalangle ASB| = 150°$, $|\sphericalangle BSC| = 120°$, $|\sphericalangle CSA| = 90°$.
V akom pomere sú obsahy trojuholníkov *ABS*, *BSC*, *CAS*?

9. Vyjadrite obsah trojuholníka *ABC* znázorneného na obrázku, ak poznáte veľkosť uhla *ACB* (γ), dĺžku strany *AC* (*b*), dĺžku strany *BC* (*a*).



*10. Aké uhly má pravouhlý trojuholník, v ktorom sú dve ťažnice na seba kolmé?

*11. Zistite, či je trojuholník *ABC* s ťažnicami dĺžok 13, $\sqrt{244}$, $\sqrt{601}$ pravouhlý.

*12. Zistite, či existujú dva nezhodné trojuholníky, ktoré sa zhodujú vo všetkých uhloch a dvoch stranách.

3. Mnohosteny
Voľné rovnobežné premietanie

1. Označme S počet stien mnohostena, V počet vrcholov mnohostena a H počet hrán mnohostena. Vyplňte tabuľku:

teleso	**S**	**V**	**H**	$S+V-H$
štvorsten	4	4	6	2
kocka				
kváder				
prav. 4-boký zrezaný ihlan				
prav. päťboký hranol				
trojboký ihlan				
5-sten				
6-sten				
7-sten				
8-sten				

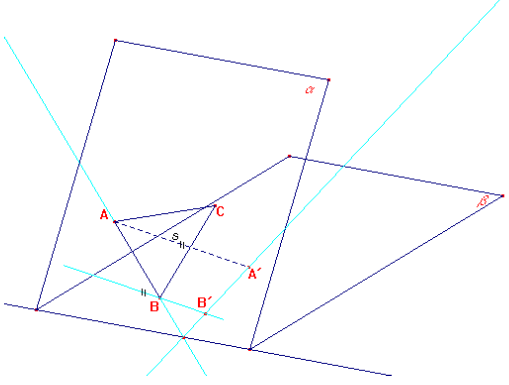
2. Koľko stien sa môže „stretávať“ vo vrchole konvexného mnohostena?

3. Koľko telies, zlepených zo 4 zhodných kociek (Pri lepení telies dodržiavajte zásadu, že ak sa dve kocky dotýkajú plochou, dotýkajú sa celou stenou.) je mnohostenmi? Načrtnite ich.

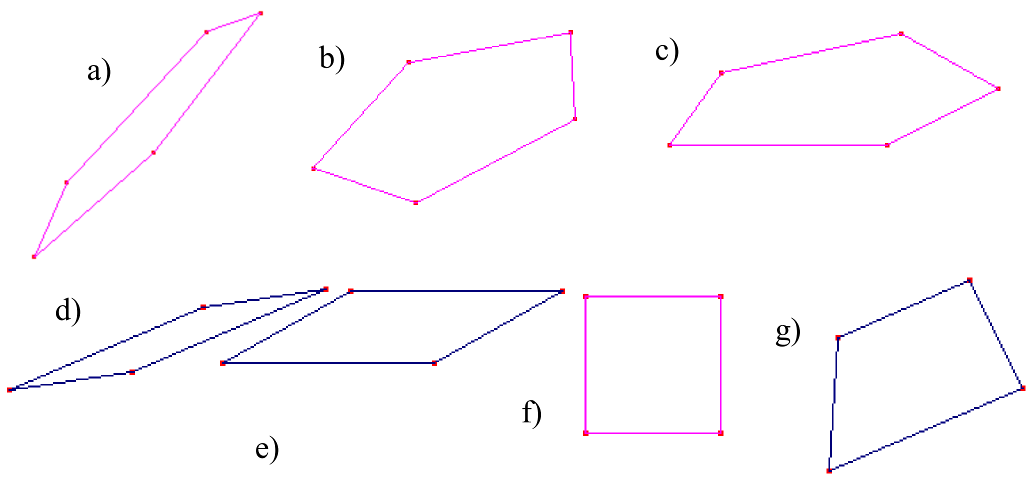
4. Znázornite aspoň dve rôzne telesá (iné ako v úlohe 3), ktoré nie sú mnohosteny.

5. Miška si vystrihla z papiera veľmi veľa zhodných pravidelných osemuholníkov a chcela z nich zlepiť teleso. Rýchlo však zistila, že sa to nedá. Skúste si to a pokúste sa vysvetliť „prečo?“.

6. Julka má voľným rovnobežným premietaním VRP so smerom s a dvojicou vzor-obraz $= AA'$ zobraziť trojuholník ABC ležiaci v rovine α do roviny β ($A' \in \beta$). Už sa jej podarilo urobiť bod B'. Má ho dobre? Zdôvodni a zobraz celý trojuholník ABC.



7. Marta zobrazovala postupne vo VRP niekoľko štvoruholníkov a niekoľko päťuholníkov. Nájdi a zdôvodni, ktoré môžu byť obrazmi štvorca a ktoré môžu byť obrazmi pravidelného päťuholníka.



8. Rozhodnite, či platí:
   a) Ak sú dve roviny rovnobežné s tou istou rovinou, tak sú aj navzájom rovnobežné.
   b) Ak sú dve roviny rovnobežné s tou istou priamkou, tak sú aj navzájom rovnobežné.
   c) Ak je rovina rôznobežná s jednou z dvoch rovnobežných rovín, tak je rôznobežná aj s druhou a pretína ich v dvoch rovnobežných priamkach.

9. Body M, N sú stredy hrán BC a EH kocky $ABCDEFGH$. Zdôvodnite, že $AM \parallel NG$.

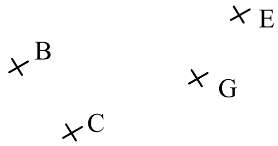
10. Bod S je stred úsečky FC v kocke $ABCDEFGH$. Presvedčite sa, že $ES \parallel \overleftrightarrow{ACH}$.

*11. Martin sa doma baví zlepovaním telies z papiera. Minule povedal, že celý týždeň vyrábal telesá s 12 hranami. Každý deň vyrobil teleso, ktoré sa líšilo od tých predchádzajúcich aspoň jednou stenou. Teda aspoň jedna stena sa zmenila z n-uholníka na p-uholník a počas predchádzajúcich dní také teleso ešte nebolo vyrobené $(n, p \in N \wedge n \geq 3 \wedge p \geq 3 \wedge n \neq p)$. Hovoril Martin pravdu? Koľko dní mohol vyrábať takéto 12-hranové telesá?

*12. Aké útvary môžu byť rezom
   a) pravidelného osemstenu,
   b) pravidelného dvanásťstenu.
   c) pravidelného dvadsaťstenu?

*13. Vo VRP narysujte obraz pravidelného dvanásťstena.

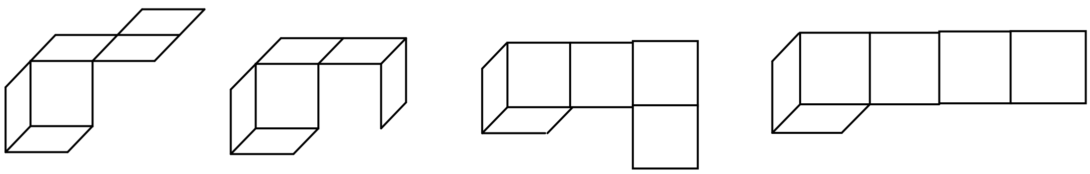
4. Stereometria I



1. Narysujte všetky možné obrazy kocky *ABCDEFGH* v rovnobežnom premietaní, ak poznáte obrazy jej vrcholov *B*, *C*, *E* a *G*.

2. Ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé? Vysvetlite.
   Obraz kocky v rovnobežnom premietaní je jednoznačne určený obrazmi
   a) ľubovoľných jej štyroch vrcholov
   b) ľubovoľných jej troch hrán
   c) troch vrcholov jednej steny a jedného vrchola z protiľahlej steny
   d) troch hrán so spoločným vrcholom.

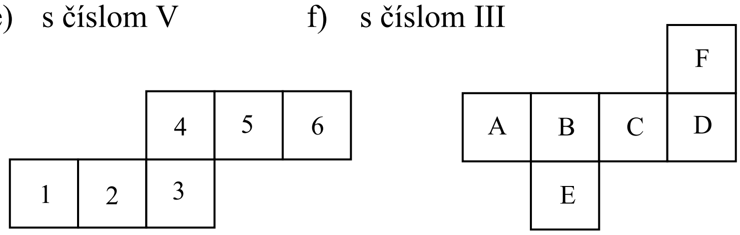
3. Maťo, Fero, Emil a Jano mali narysovať sieť kocky a potom z nej túto kocku zložiť. Na obrázku vidíte ich „polotovary“ (všetky sa skladajú zo šiestich štvorcov).
   a) Pokúste sa zistiť, z akých mnohouholníkov boli zhotovené.
   b) Ktorí z nich sú na dobrej ceste úlohu správne vyriešiť?

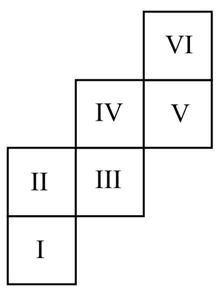


obr. 1 obr. 2 obr. 3 obr. 4

4. Koľko rôznych sietí má kocka s hranou 1 cm? Načrtnite ich.

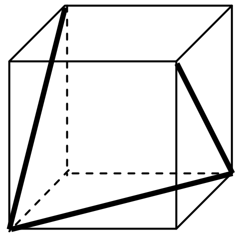
5. Zo sietí znázornených na obrázku zložíme kocky. Zistite, čo je napísané na stene protiľahlej k stene
   a) s číslom 2 b) s číslom 3
   c) s písmenom F d) s písmenom B
   e) s číslom V f) s číslom III



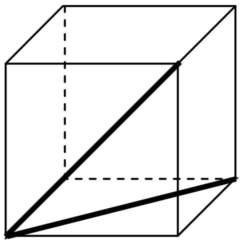


6. Predstavte si, že sme poslednú sieť z úlohy 5 prilepili stenou „IV“ ku doske stola a zvyšok zohli tak, aby vznikol model kocky. Zistite,
   a) aké číslo bude na hornej stene tohto modelu,
   b) aké číslo bude na ľavej stene a aké na pravej stene, ak na zadnej je číslo II.

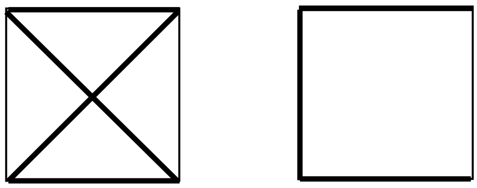
7. a) Na stenách kocky z priehľadného skla je nakreslená čiara (pozri obrázok). Nakreslite, ako vidno túto čiaru pri pohľade na kocku spredu, zhora a sprava.



b) Silvia si znázornila kocku vo voľnom rovnobežnom premietaní. Na obrazy jej stien kreslila úsečky s krajnými bodmi vo vrcholoch kocky. Zatiaľ má dve (Obrázok 1). Do jej obrázka dokreslite čo najmenej (čo najviac) takýchto úsečiek tak, aby ste dostali nasledovné dva priemety výslednej čiary (Obrázok 2).



Obrázok 1



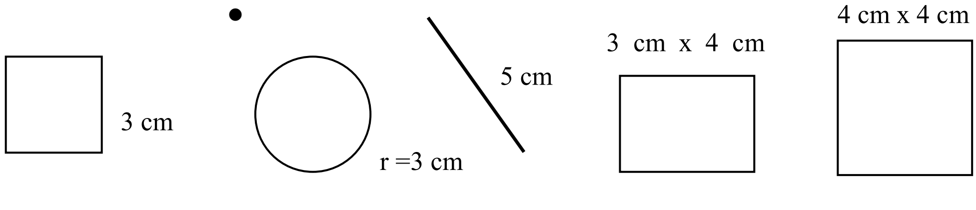
pôdorys bokorys

Obrázok 2

8. a) Nakreslite všetky navzájom nezhodné siete pravidelného štvorstena, ktorého hrany majú dĺžku 2 cm.
b) Koľko rôznych sietí má každý pravidelný štvorboký ihlan?

9. Sherlock Holmes vyšetroval vlámanie do matematického kabinetu. Učiteľ matematiky tvrdil, že zmizol model
- kocky s hranou dĺžky 3 cm,
- kvádra s rozmermi 4 cm x 3 cm x 4 cm,
- valca s priemerom 4 cm a výškou 4 cm,
- ihlanu s podstavou tvaru obdĺžnika s rozmermi 3 cm x 4 cm a výškou 5 cm,
- gule s polomerom 3 cm a
- kužeľa s polomerom podstavy 3 cm a výškou 5 cm.

Sherlock Holmes si pozorne preštudoval stopy, ktoré ostali po telesách na zaprášenej polici a zistil, že v prípade jedného z modelov uviedol učiteľ nesprávne rozmery. O ktorý model šlo?



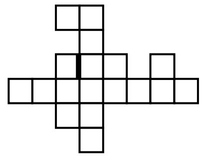
10. Máme dve škatule tvaru kvádra. Červená má rozmery 12 cm, 25 cm a 40 cm, modrá má objem 1000 cm^3. Ktoré z uvedených výrokov o krabiciach sú určite pravdivé?
   a) Modrá škatuľa sa určite vmestí do červenej.
   b) Modrá škatuľa sa určite nevmestí do červenej.
   c) Buď sa vmestí modrá škatuľa do červenej alebo červená do modrej.
   d) Červená škatuľa sa určite vmestí do modrej.
   e) Červená škatuľa sa určite nevmestí do modrej.

*11. Existuje štvorsten, ktorého všetky steny sú navzájom zhodné, ale aspoň dve z jeho hrán majú rôznu dĺžku?

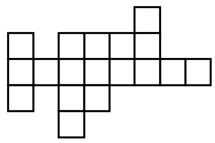
*12. Vo voľnom rovnobežnom premietaní znázornite teleso, ktorého sieťou bude štvorec.

*13. Z 27 rovnakých malých kociek chceme zlepiť jednu veľkú. Koľko najmenej stien musíme natrieť lepidlom, aby držala pokope?

*14. a) Peter nakreslil takúto sieť telesa z úlohy B5:
Zložte z papiera model telesa. Čo asi znamená čiara vyznačená hrubo?



b) Juro nakreslil takúto sieť toho istého telesa, zabudol však vyznačiť, pozdĺž ktorých čiar ju treba rozrezať, aby sa z nej dal uvedený model poskladať. Pokúste sa odstrániť tento nedostatok.



*15. Riešte úlohu 7 pre 5, resp. 6 hracích kociek.

5. Logika II

1. Pred vigvamom sedia dvaja indiáni, jeden veľký a jeden malý. Malý je syn veľkého, ale veľký nie je otec malého. Ako je to možné?

V Shakespearovom Kupcovi Benátskom vystupuje dievča Porcia, a tá má tri skrinky – zlatú, striebornú a bronzovú. V jednej z nich je Porciin portrét. Kto sa uchádza o jej ruku, musí určiť, v ktorej skrinke portrét je. Ak má šťastie a uhádne, smie sa s ňou oženiť. Na každej skrinke je nápis, ktorý má nápadníkovi pomôcť pri ťažkej skúške. Poďme sa pozrieť, ako to na takej skúške vyzerá

2. Nápadník dostal informáciu, že najviac jeden z troch nápisov na skrinkách je pravdivý. Ktorú skrinku si má vybrať?

Zlatá	Strieborná	Olovená
Portrét je v tejto skrinke	Portrét nie je v tejto skrinke	Portrét nie je v zlatej skrinke

3. V Montreale vylúpili zlatníctvo a páchateľ alebo páchatelia si odviezli ukradnuté šperky autom. Na políciu priviedli troch podozrivých: M.B., J.V., I.Z., a vypočúvali ich. Zistilo sa toto:
   a) Do prípadu nebol zapletený nikto iný, ako M.B., J.V., I.Z.
   b) I.Z. sa nikdy nepúšťa do akcie bez M.B.
   c) J.V. nevie šoférovať
   Možno niektorého z nich s istotou obviniť?

4. Pán McGregor, obchodník z Londýna, telefonoval do Scotland Yardu, že mu vykradli obchod. K výsluchu boli predvedení traja podozriví: A, B a C. Zistili sa tieto skutočnosti:
   a) Každý z týchto troch – A, B i C – bol v deň lúpeže v obchode a nikto iný už v ten deň v obchode nebol.
   b) Ak je vinný A, mal práve jedného spoločníka.
   c) Ak je B nevinný, je nevinný aj C.
   d) Ak sú vinní práve dvaja, tak jedným z nich je A.
   e) Ak je C nevinný, je nevinný aj B.

   Koho by ste z krádeže obvinili?

5. Miško si v duchu vybral jedno číslo z nasledujúcej tabuľky. Zuzka chvíľu hádala, ktoré to je. Potom povedala, že hľadané číslo
   - je v prvom riadku
   - je párne
   - nie je v druhom stĺpci
   - je väčšie ako 3

1	2	3
9	5	6
7	4	8

   Miško Zuzke povedal, že iba jedna zo štyroch výpovedí je pravdivá a tri zvyšné sú nepravdivé. Ktoré číslo si Miško vybral?

6. Traja pretekári súťažili každý v inej disciplíne a každý získal inú medailu. Miro nepretekal v behu na 400 metrov. Zlato získal bežec na 800 metrov. Jaro získal

bronzovú medailu, pretekár v behu na 100 metrov nezískal striebro. Rado nezískal zlato. Kto získal bronz? V akej disciplíne pretekal Rado? Akú medailu získal bežec v behu na 100 metrov?

7. Súťaže v jedení gumených medvedíkov sa zúčastnili 4 súťažiaci. Označme ich A, B, C, D. Tu je záznam ich rozhovoru pred súťažou:

   A: „Vyhrám ja!“
   B: „Ja som chlapec, ja budem prvý“
   C: „Chlapci sa mýlia, D skončí o jedno miesto za mnou a za A už nebudú žiadni chlapci.“
   D: „C má pravdu a za A už nebudú žiadne dievčatá“

   Po súťaži sa ukázalo, že práve dve z týchto štyroch tvrdení boli pravdivé. Zistite, ako dopadla súťaž a aké sú pohlavia súťažiacich ak viete, že sú medzi nimi práve dvaja chlapci a že žiadni dvaja súťažiaci neskončili na rovnakom mieste.

8. Na trhu s papagájmi sa dajú spraviť dva typy obchodov. Červeného vám vymenia za 5 modrých, alebo modrého za 5 červených. Na trh ste došli s jedným červeným papagájom. Podarí sa vám po niekoľkých výmenách dosiahnuť rovnaký počet červených a modrých papagájov?

V nasledujúcich úlohách vystupujú ľudia z ostrova Pravdoklam, kde žijú len dva druhy ľudi – poctivci (stále hovoria pravdu) alebo kramári (stále klamú)

9. Na ostrove Pravdoklam žije 1999 domorodcov. Každý z domorodcov má práve jeden z týchto koníčkov: buď rád spieva alebo rád hrá futbal, alebo rád chytá ryby. Káždému domorodcovi položili tri otázky:
   a) či rád spieva
   b) či rád hrá futbal
   c) či rád chytá ryby

   Na prvú otázku odpovedalo „áno“ 1000 domorodcov, na druhú otázku 700 a na tretiu otázku 500 domorodcov. Koľko klamárov žije na ostrove Pravdoklam?

10. Majme tri osoby A, B, C čo povedali:

    B: „Všetci sme klamári“
    C: „Práve jeden z nás je poctivec“

    Čo sú A, B, C zač?

11. A povedal: „Ja som klamár ale B nie je.“ Čo sú obaja zač?

12. A povedal: „Ak som poctivec, tak zjem svoj kobúk“. Ukážte, že zje svoj kobúk.

13. A povedal:
    a) „Ak som poctivec, tak 2+2=4.“ Znamená to, že je poctivec?
    b) „Ak som poctivec, tak 2+2=5.“ Znamená to, že nie je poctivec?

*14. Knieža Gvidon mal troch synov. 93 jeho potomkov mali po dvoch synoch, zvyšok zomrel bezdetný. Koľko potomkov mal knieža Gvidon?

*15. Do mesta prišiel kráľovský posol a povedal: *„V meste žije aspoň jedna neverná žena. Jej muž ju má vyhnať z mesta v noci toho dňa, keď o jej nevere získa istotu.“* Každý muž vedel o každej cudzej žene, či je verná, alebo nie, avšak nevedel, či jeho vlastná mu je verná. Muži sa ráno schádzali na námestí a keď niektorý vyhnal svoju ženu, správa sa rozniesla. V tretiu noc bola vyhnaná richtárova žena. Koľko neverných žien bolo v meste?

*16. Máme 10 vrecúšok s mincami. V jednom z nich sú mince falošné. Normálna minca váži 10 gramov, falošná 11. Ako by ste na jedno váženie pomocou presnej digitálnej váhy zistili, v ktorom vrecúšku sú falošné mince?

6. Matematická indukcia

1. Na nasledujúcej úlohe demonštrujte princíp matematickej indukcie (s vysvetlením pre študentov na prvej hodine, kde sa s týmto typom dôkazu stretnú):
$\forall n \in N: 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

2. Dokáže nasledujúce rovnosti:
   a) $\forall n \in N: 2^2 + 6^2 + ... + (4n-2)^2 = \frac{4}{3} n(2n-1)(2n+1)$
   b) $\forall n \in N: \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
   c) $\forall n \in N: 3 + 3.5 + 3.5^2 + ... + 3.5^n = 3.\frac{5^{n+1}-1}{4}$
   d) $\forall n \geq N: 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$

3. Nájdite najmenšie prirodzené číslo $n_0 \geq 1$ pre ktoré platia nasledujúce nerovnosti a pre každú z nich dokážte jej platnosť (pre $\forall n \in N, n \geq n_0$):
   a) $2n > n+1$ b) $n < 2^n$ c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

4. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení (platné tvrdenia dokážte, pri neplatných nájdite kontrapríklad):
   a) $\forall n \in N: 48 \mid (7^{2n} - 1)$
   b) $\forall n \geq 0: \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1$
   c) $\forall n \in N: 73 \mid (2^{3n} + 3^{4n})$

5. Zistite, na koľko maximálne častí delí n kružníc rovinu. Svoje tvrdenie dokážte.

6. Posúďte riešenia úlohy: „Dokážte, že $\forall n \geq 3: n^{n+1} > (n+1)^n$"
Silvia:
$n = 3: 3^4 = 81,\ 4^3 = 64,\ 81 > 64$
$n = 4: 4^5 = 1024,\ 5^4 = 625,\ 1024 > 625$
Rozdiely sa zväčšujú, platí to pre všetky ďalšie $n \in N$

Filip:

$n = 3 \Rightarrow LS = 3^4 = 81, PS = 4^3 = 64, LS > PS$

$n \overset{?}{\Rightarrow} n+1 : n^{n+1} > (n+1)^n \overset{?}{\Rightarrow} (n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1}$

$k = n+1 : k^{k+1} > (k+1)^k$

čbtd.

7. Nájdite chybu v nasledujúcom dôkaze tvrdenia *V(n)*:
„*Pre ľubovoľných n reálnych čísel* $a_1, a_2, .., a_n$, $n \geq 1$ *platí* $a_1 = a_2 = ... = a_n$.“
1° $a_1 = a_1, \forall a_1 \in R \Rightarrow V(1)$ platí
2° Zoberme ľubovoľných $k+1$ reálnych čísel $a_1, a_2, .., a_{k+1}$. Podľa indukčného predpokladu $a_1 = a_2 = ... = a_k$ a tiež $a_2 = a_3 = ... = a_{k+1}$. Pretože rovnosť je tranzitívna, dostávame $a_1 = a_2 = ... = a_k = a_{k+1}$, čiže $V(k) \Rightarrow V(k+1)$. Teda *V(n)* platí pre všetky prirodzené čísla $n \geq 1$.

*8. Dokážte, že ak prvočíslo *p* delí súčin prirodzených čísel $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$, $n \geq 2$, tak existuje také $i \in \langle 1, n \rangle$, že *p* delí a_i.

* 9. V priestore je daných 17 priamok. Dokážte, že sa medzi nimi dajú nájsť tri, ktoré sú navzájom rovnobežné, alebo sú rôznobežné alebo navzájom mimobežné.

*10. Dokážte, že ak sa súčin *n* kladných reálnych čísel rovná 1, tak ich súčet je aspoň *n*.

*11. Dokážte vzťah medzi aritmetickým a geometrickým priemerom *n* kladných reálnych čísel: $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 . a_2 . \ldots . a_n}$.

7. Rovnice a nerovnice

1. Miško mal na domácu úlohu vymyslieť rovnicu, ktorá má koreň 3, rovnicu, ktorá má koreň 2, rovnicu, ktorá má koreň -4, rovnicu, ktorá má koreň 5 a rovnicu, ktorá má koreň 7. Tu sú jeho rovnice: $4x^3 + 8x^2 - 31x + 4 = 0$, $x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 12 = 0$, $x^3 - 6x^2 + 6x = 5$, $x^5 - 2x^3 - x - 14 = 0$, $x^3 - 8x^2 + 4x = -21$. Zisti, ktorá je ktorá, ak vieš, že úlohu vyriešil správne

2. Pre ktoré $k \in Z$ má rovnica $x^4 = x^k$ v R
   a) práve jedno riešenie
   b) práve dve riešenia
   c) maximálny počet riešení

3. Nájdite všetky riešenia nasledujúcich rovníc ak viete, že:
   a) -2 a 3 sú riešením rovnice $x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 43x + 42 = 0$
   b) rovnica $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 6x + 9 = 0$ má len dvojnásobné korene a jedným z nich je - 1.

4. Ktoré z čísel 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9 sú riešením rovnice
   a) $6x^3 + 4x^2 + 2x = 1$
   b) $x^7 - 2x^5 + x^3 + 4x = 5$

   Skúste túto úlohu vyriešiť bez kalkulačky

5. Pre ktoré $a \in R$ je riešením nerovnice $\sqrt{x+3} \geq a$

   a) R b) $\{\ \}$ c) $\langle 1, \infty)$ d) $\langle -3, \infty)$ e) jednoprvková množina?

6. V nerovnici $\sqrt{x+*}$ □ $\sqrt{2x+5}$ doplňte namiesto $*$ číslo a □ nahraďte jedným zo znakov „<“, „>“ tak, aby jej riešením bolo
   a) $\langle 3, \infty)$ b) $(9, \infty)$

7. Julka riešila nerovnicu:

   $\sqrt{x+1} \geq x - 1$

   $D = \langle -1, \infty)$

   $x + 1 \geq x^2 - 2x + 1$

   $x^2 - 3x \geq 0$

   $K = \langle 0,3 \rangle$

   Adam jej povedal, že urobila chybu, lebo zabudla na podmienku $x - 1 \geq 0$. Podľa neho je teda výsledkom $\langle 1,3 \rangle$. Katka dosadila za x nulu a zistila, že je riešením nerovnice. Preto tvrdila, že jej riešenie je správne. Kto z nich má pravdu?

   Tú istú nerovnicu ako Julka riešil Maťo takto:

$D = \langle -1, \infty)$ $\qquad x+1 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 3x = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

Podľa neho je riešením niektorý z intervalov $\langle -1,3\rangle, \langle 3,\infty)$. Viete ktorý? Viete prečo neuvažoval o intervaloch $\langle -1,0\rangle, \langle 0,3\rangle$?

8. a) Akú chybu asi urobil Juro, ak mu pri riešení nerovnice $\sqrt{x} > x - 2$ vyšiel interval $(1,4)$, resp. $\langle 2,4)$? Vyriešte nerovnicu.

   b) Má Juro pravdu, ak tvrdí, že riešením nerovnice $\sqrt{x-4} < -3$ je $\langle 4,13)$?

9. Fero určoval definičný obor funkcie f: y = $\sqrt{3x^2 - 4x + 2}$ takto:

   $3x^2 - 4x + 2 \geq 0$
   $D = 16 - 24$
   $D_f = \{\ \}$

   Je jeho výsledok správny?

10. Pre ktoré hodnoty parametra m nemá rovnica $x^2 + (m+5)x + 3m = 0$ reálne korene?

*11. Riešte rovnicu: $x \cdot \dfrac{5-x}{x+1} \cdot \left(x + \dfrac{5-x}{x+1} \right) = 6$

*12. Riešte rovnicu $x^3 + 1 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x-1}$

*13. Riešte rovnicu $\sqrt[7]{2^7 - x} + \sqrt[7]{x} = 2$

*14. V nerovnici $\sqrt{x^2 + {*}x + \Delta}$ > x + 2 nahraďte * a Δ číslami, ak viete, že riešením nerovnice je jeden z intervalov (–∞, –3⟩, ⟨8, ∞) a rovnica $\sqrt{x^2 + {*}x + \Delta}$ = x + 2 nemá riešenie.

*15. Aké číslo má byť na mieste ◘ v nerovnici ◘ $\sqrt{x}$ < x + 3, ak jej riešením sú niektoré z intervalov ⟨0, 1), (1, 9), (9, ∞)? Aké je riešenie nerovnice?

*16. Riešte v R: $\sqrt{x+4} + \sqrt[4]{16-x} > 2$

*17. Riešte v R: $\sqrt{2 + x + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} < 2$

8. Sústavy rovníc II

1. Nájdite dve čísla, pre ktoré platí, že súčet ich prevrátených hodnôt je 5 a súčet druhých mocnín ich prevrátených hodnôt je 13.

2. Riešte v R:

   a) $$\begin{aligned} 5x^2+3y^2&=2\\ 3x^2-7y^2&=-1 \end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned} |x|+3|y|&=11\\ -|2x|+|y|&=-1 \end{aligned}$$

   c) $$\begin{aligned} \frac{1}{x}-\frac{2}{y}&=1\\ \frac{6}{x}+\frac{2}{y}&=8 \end{aligned}$$

3. a) Obdĺžnik s obsahom $24cm^2$ má obvod $20cm$. Zistite dĺžky jeho uhlopriečok.
   b) Aký obsah má pravouhlý trojuholník s preponou dlhou $65mm$ a obvodom $144mm$?
   Riešte obe úlohy bez toho, aby ste zisťovali dĺžky strán.

4. Matematikár raz pred Vianocami prekvapil svoju triedu súťažou v riešení sústav rovníc. Prvá bola táto sústava:
   $$\begin{aligned} 4x+5y&=-2\\ x^2+y^2&=2xy \end{aligned}$$
   Eva – najlepšia počtárka v triede – si vyjadrila z prvej rovnice x a dosadila do druhej. Dostala síce správny výsledok, ale bola až druhá, predbehol ju figliar Fero.
   Ešte horšie pre Evu dopadla ďalšia sústava:
   $$\begin{aligned} x^2+2xy&=-y^2\\ x^2&=2y^2-49 \end{aligned}$$
   Keď Fero po chvíli zahlásil výsledok, ona ešte netušila, ako sa k nemu dopracuje.
   Tie odmocniny vyzerali beznádejne...
   Na Ferov fígeľ však prišla hneď v ďalšej sústave:
   $$\begin{aligned} x^2+2y^2+2x&=17\\ x^2+6xy+9y^2&=0 \end{aligned}$$
   Prišli ste naň aj vy? Vyriešte všetky tri sústavy.

5. Fero si raz-dva poradil so sústavu $\begin{aligned} 7x^2+4yx&=4x+3\\ x^2+2yx+y^2&=1 \end{aligned}$, ale matikár mu riešenie neuznal. Tvrdil, že sústava má viac ako 2 riešenia.
   a) Koľko riešení vyšlo Eve, ktorá úlohu vyriešila správne?
   b) Kde urobil Fero chybu?

6. Juro riešil sústavu rovníc: $\begin{aligned} x^2+5xy&=0\\ 2x^2+15x&=14y^2-39 \end{aligned}$

Z prvej rovnice si vyjadril x a dosadil do druhej rovnice. Vyšli mu dve riešenia: $[-5,1]$ a $\left[-\frac{65}{12},\frac{13}{12}\right]$. Vyriešil úlohu správne?

7. Laco a Maťo riešili sústavu rovníc: $\begin{aligned} x^2 + xy &= 9 \\ y^2 + xy &= 16 \end{aligned}$

   Laco postupoval „klasicky“: Z prvej rovnice vyjadril y a dosadil do druhej rovnice. Maťo obe rovnice sčítal. Ktorá metóda vedie k správnemu výsledku?

8. Lenka a Petra mali na domácu úlohu riešiť sústavu rovníc $\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{y-26}{x-26} \\ xy &= 25 \end{aligned}$

   Keďže sú dvojičky, nečudo, že začali rovnako: Upravili prvú rovnicu na tvar $x^2 - 26x = y^2 - 26y$. Lenka na základe nej usúdila, že $x = y$, dosadila do druhej rovnice a dostala $y^2 = 25,\ y = \pm 5,\ x = \pm 5$. Petra však ešte nebola s prvou rovnicou celkom spokojná, preto ju napísala najprv ako $x^2 - y^2 = 26x - 26y$ a potom ako $(x-y)(x+y) = 26(x-y)$. Ďalej usúdila, že $x + y = 26$ vyjadrila $y = 26 - x$ a dosadila do druhej rovnice: $26x - x^2 = 25$. Ďalej písala:

   $x^2 - 26x + 25 = 0$

   $x = 1 \ \vee \ x = 25$

   $y = 25 \quad y = 1$

   Ktoré z dievčat riešilo úlohu správne?

9. Posúďte riešenia nasledujúcich sústav rovníc:

a)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ (x+y)^2 &= 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x^2 + (1-x)^2 &= 13 \\ y &= 1 - x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} (x-3)(x+2) &= 0 \\ y &= 1 - x \end{aligned}$$
$$K = \{[3,-2],[-2,3]\}$$

b)
$$\begin{aligned} |x-2| + y &= 1 \\ x + |y-1| &= 4 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} |x-2| + y &= 1 \\ x + 1 - y &= 4 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} |x-2| + y &= 1 \\ y &= x - 3 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} |x-2| &= 1 - x + 3 \\ y &= x - 3 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &x - 2 = 1 - x + 3 \ \vee \\ &\vee \ 2 - x = 1 - x + 3 \\ &y = x - 3 \end{aligned}$$
$$K = \{[3,0]\}$$

c)
$$\begin{aligned} x(x+y) &= 0 \\ (y^2+1)(1+y-x) &= 0 \end{aligned}$$
1. $x = 0$
$$(y^2+1)(1+y-x) = 0$$
$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 1 + y &= 0 \end{aligned}$$
2. $x = -y$
$$(y^2+1)(1+y-x) = 0$$
$$\begin{aligned} x &= -y \\ 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$$
$$K = \left\{[0,-1],\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

*9. Riešte v R^2 sústavy rovníc:

a) $5x^2+12x+2yx+y^2+4=0$
$2x^2+2xy+3x+3y=2$

b) $x(x+1)(3x+5y)=114$
$x^2+4x+5y=24$

c) $\frac{x}{y+5}+\frac{5}{x+y}+\frac{y}{x+5}=-3$
$x^2+y^3=13$

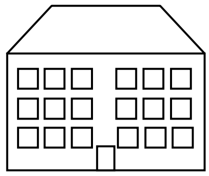
d) $x^6+y^6=1$
$x^4+y^4=1$

e) $x+y+\sqrt{x+y}=20$
$x^2+y^2=136$

f) $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\sqrt{x_3}$
$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}=\sqrt{x_4}$
$\sqrt{x_3}-\sqrt{x_4}=\sqrt{x_5}$
$\sqrt{x_4}-\sqrt{x_5}=\sqrt{x_1}$
$\sqrt{x_5}-\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}$

g) $x_1-x_2=2$
$x_2-x_3=2$
....
$x_8-x_9=2$
$x_9-x_1=2$

9. Kombinatorika II



1. Koľkými spôsobmi môžeme rozsvietiť okná na priečelí tohto domu tak, aby na každom podlaží svietili práve
   a) dve okná a z každých dvoch okien nad sebou vždy len jedno,
   b) štyri okná a z každých troch okien nad sebou vždy len dve?

2. Koľko obdĺžnikov rôznych rozmerov môžeme poskladať z 225 štvorcových dlaždíc, ak máme pri každom skladaní použiť všetky dlaždice?

3. V koľkých dvojciferných číslach je druhá číslica väčšia ako prvá?

4. Zuzka povedala, že ich auto má šťastné číslo, lebo všetky jeho cifry sú párne. Jej sestra Janka z toho usúdila, že každé druhé auto musí mať šťastné číslo. Mama protestovala, že šťastné čísla sú oveľa vzácnejšie, možno ak jedno zo sto áut má také. Oco to odhadol na zhruba každé dvadsiate. Kto z nich bol najbližšie k pravde? (Pomôcka: Koľko áut so značkami od BA 001 po BA 999 má šťastné číslo?)

5. V rovine je daných 5 bodov tak, že žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Koľko
   a) úsečiek,
   b) priamok,
   c) kružníc je týmito bodmi určených?

6. Do futbalového turnaja sa prihlásilo 8 družstiev. Koľko zápasov by sa odohralo, ak by sa turnaj hral
   a) systémom „každý s každým“,
   b) „vylučovacím“ systémom, podobne ako tenisové turnaje?

7. Martin má na kartičkách napísané všetky štvorciferné čísla. Rozhodol sa, že kartičky roztriedi nasledovne: Na jednu kôpku uloží kartičky s číslami, v ktorých zápise sa nachádza aspoň jedna z číslic 1 a 5. Ostatné kartičky uloží na druhú kôpku.
   a) Je pravda, že druhá kôpka je dvakrát väčšia ako prvá?
   b) Martin po čase niektoré kartičky postrácal. Kompletnú mal už len sadu od 1000 po 6000 (vrátane). Ak ich aj teraz rozdelí rovnakým spôsobom, ktorá z kôpok bude obsahovať viac kartičiek? O koľko?

8. Narysujte päť priamok v rovine tak, aby mali práve 8 priesečníkov.

9. V rovine je daných 8 bodov, 5 z nich leží na jednej priamke. Žiadne iné tri body na jednej priamke neležia. Koľko priamok dané body určujú?

*10. Žiadne tri uhlopriečky konvexného n-uholníka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nemajú spoločný vnútorný bod. Koľko priesečníkov majú tieto uhlopriečky?

*11. Koľko telesových uhlopriečok má pravidelný 12-sten?

*12. Skupina 12-tich stredoškolákov sa rozhodla usporiadať si cez prestávky turnaj v mariáši (V jednej partii mariáša súperia traja hráči s cieľom dosiahnuť čo najväčší zisk.). Pritom chcú, aby sa v žiadnej z partií nestretla dvojica, ktorá už predtým odohrala spoločne inú partiu.

a) Koľko maximálne partií môžu odohrať, ak chcú dodržať stanovenú podmienku?

b) Po odohraní 10-tich partií sa zistilo, že niektorí hráči už odohrali aj 5 partií, zatiaľ čo iní iba dve. (Ako sa mohlo niečo také stať? Nájdite taký rozpis zápasov.) Po odohraní celého turnaja pritom chceli stanoviť poradie tak, že spočítajú výsledné zisky z jednotlivých partií. Pri nerovnakom počte odohraných partií by im ale výsledok nič nepovedal. Pre nasledujúci turnaj pridali teda ďalšiu podmienku: Každý z hráčov musí odohrať rovnaký počet partií. Koľko najviac partií sa vám pre nich podarí naplánovať tentoraz?

10. Pravdepodobnosť I

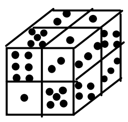
1. Majme kocku s jednou červenou, dvoma bielymi a tromi zelenými stenami. Aká je pravdepodobnosť, že na nej padne (nepadne)
   a) červená
   b) biela
   c) zelená stena?

2. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode kockou padne
   a) šestka
   b) štvorka alebo päťka
   c) prvočíslo?

3. a) Pri hode kockou padlo párne číslo. S akou pravdepodobnosťou to bola štvorka?
   b) Marek hádzal kockou a padla mu trojka. Julke povedal, že hodil nepárne číslo. Aká je pravdepodobnosť toho, že Julka uhádne aké číslo hodil?

4. Pri hádzaní kockou padla desaťkrát za sebou šestka. S akou pravdepodobnosťou padne aj pri jedenástom hode?

5. Kocku na obrázku vyrobili zlepením 8 hracích kociek, pričom zliepali vždy iba steny s rovnakým číslom. Zistite, s akou pravdepodobnosťou nám na tejto kocke padne hodnota
   a) 9
   b) 14
   c) 10?



6. Fero mal drevenú kocku s hranou dĺžky 5. Najprv nafarbil jej povrch na červeno, potom ju rozrezal na 125 malých kociek s hranou dĺžky 1. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná malá kocka bude mať práve dve červené steny?

7. Zo sedmových kariet (32 kariet) vyberieme kartu. Aká je pravdepodobnosť, že to bude
   a) eso b) zeleň c) zelené eso d) sedmička alebo osmička?

8. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma kockami bude súčet „padnutých“ čísel
   a)5 b) najviac 5 c)aspoň 5 d) maximálny e) minimálny?

9. Hádžeme troma kockami. Aká je pravdepodobnosť, že padne
   a) aspoň jedna šestka
   b) najviac jedna šestka?

10. Majme kocku s jednou červenou, dvoma bielymi a tromi zelenými stenami. Hoďme ňou trikrát. Aká je pravdepodobnosť, že padla
    a) 5-krát zelená
    b) červená najviac 10-krát
    c) trikrát biela
    d) zelená ani raz
    e) biela aspoň raz
    f) červená aspoň raz, ale najviac 4 krát
    g) zelená aspoň raz, ale najviac 2-krát?

11. Janko a Marienka sa radi hrajú takúto ekonomickú hru: Každý hodí jednou kockou. Ak padne 1, 1 tak Janko dostane korunu. Ak padne 1, 2, tak dostane korunu Marienka. Ak padne hocičo iné, tak dajú korunku do prasiatka. Skúste odhadnúť, koľko korún skončí v prasiatku, koľko u Janka a koľko u Marienky, ak viete, že na začiatku mali 360 Sk.

*12. Nájdite všetky prirodzené čísla n pre ktoré platí: pravdepodobnosť, že náhodne zvolené číslo prirodzené číslo $m \leq n$ je prvočíslo, je aspoň 1/2?

*13. Na koľký pokus najčastejšie padá šestka?

*14. Koľkokrát treba v priemere hodiť kockou, aby padla šestka?

*15. Stojíte pred troma dverami a viete, že za jednými z nich je poklad (ten chcete získať). Chystáte sa otvoriť jedny dvere, keď tu sa zrazu objaví kúzelná babička, otvorí jedny zo zvyšných dvier a vy vidíte, že za nimi poklad nie je. Čo urobíte – zostanete pri dverách, pri ktorých ste boli, prejdete k tretím dverám alebo je to jedno?