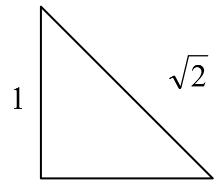
1. Goniometrické funkcie, rovnice a nerovnice

1. Z obrázku „vidno,“ že $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nakreslite obrázky, z ktorých bude vidieť, čomu sa rovná $\sin 30°$ a $\cos\ 60°$.



2. Podarí sa vám nájsť takú hodnotu argumentu x, pre ktorú platia súčasne obe nasledujúce rovnosti?

   a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{2}{3}, \cos x = \frac{1}{3}$

   c) $\sin x = \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}$ d) $\sin x = \frac{5}{4}, \cos x = -\frac{3}{4}$

3. Zistite hodnotu

   a) $\cos x$, ak viete, že $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ a $\sin x = -\frac{1}{5}$

   b) $\sin x$, ak viete, že $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ a $\cos\ x = \frac{3}{5}$.

4. Určte (bez pomoci kalkulačky) hodnotu $\sin 75°$.

5. Určte definičný obor funkcii:

   a) $f : y = \sqrt{\sin 2x}$ b) $g : y = -\mathrm{cotg}(3x - \pi)$

6. Načrtnite grafy daných funkcií:

   a) $y = \left|3\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) - 1\right|$ b) $y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

   c) $y = \mathrm{tg}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$ d) $y = 2\cot g|2x - \pi| + \frac{\pi}{2}$

7. Riešte na $\langle 0, 2\pi\rangle$:

   a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\mathrm{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}$ c) $\sin x + \cos x \leq 2$

   d) $2\sin x < |1 + \sin x|$ e) $\cos^2 x \geq \frac{1}{4}$ f) $\sin x + |\sin x| \leq 0$

8. Nájdite všetky riešenia danej nerovnice, ak viete, že:

   a) zo všetkých $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ vyhovujú nerovnici $\cos x$? len $x \in \left(-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right)$

   b) zo všetkých $x \in \langle -2\pi, 0 \rangle$ vyhovujú nerovnici $\sin x >$? len

   $x \in \left\langle -2\pi, \quad -\frac{8}{9}\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{9}, 0 \right)$

9. Miloš riešil nerovnicu $\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi \right) < -\frac{1}{2}$. Postupoval nasledovne:

   Vyriešil príslušnú rovnicu $\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi \right) = -\frac{1}{2}$ na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

   $x_1 + \frac{2}{3}\pi = \frac{7}{6}\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$, $\quad x_2 + \frac{2}{3}\pi = \frac{11}{6}\pi \Rightarrow x_2 = \frac{7}{6}\pi$.

   Potom rozdelil interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ na intervaly $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi \right)$, $\left(\frac{7}{6}\pi, 2\pi \right\rangle$.

   Dosadzovaním zistil, že π nerovnici vyhovuje, $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{11}{6}\pi$ nie. Z toho usúdil, že na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ má nerovnica riešenie $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi \right)$ a na

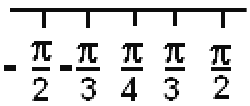
   $R \quad \bigcup_{k \in Z} \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$.

   Posúďte jeho riešenie.

10. Posúďte nasledujúce riešenia nerovnice $\dfrac{2\cot g \frac{x}{2} . \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}} < 1$:

   Maťo: Po úprave dostaneme $tgx > 1$ a na základe grafu funkcie tgx môžeme usúdiť, že riešením nerovnice je $\bigcup_{k \in Z} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

   Paľo: Príslušná rovnica má na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ riešenie $\frac{\pi}{4}$.



   $\frac{\pi}{3}$ nerovnici vyhovuje, $-\frac{\pi}{3}$ nie.

   Riešením nerovnice na R je $\bigcup_{k \in Z} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.

11. Riešte v R:

a) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

b) $2\cos^2 x = -\sqrt{2}\cos x$

c) $\dfrac{1-\sin^2 x}{2} + \dfrac{\cos x}{4} - \dfrac{1}{4} = 0$

d) $\mathrm{tg}^2 x = -\mathrm{tg}\, x$

e) $\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\dfrac{tgx.tg2x}{tg2x - tgx} < \dfrac{1}{2}$

g) $\sin x + \sqrt{3}\cos x \ge -1$

h) $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x} + \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \ge 2tgx$

12. V pohári tvaru valca s priemerom 6 cm siaha voda 1 cm pod okraj. O aký najväčší uhol môžeme pohár nakloniť tak, aby sa voda nevyliala?

13. Na mape Vysokých Tatier s mierkou 1:75 000 sú zastávky lanovky Štrbské Pleso a Tatranská Lomnica od seba vzdialené 52 mm. Ich nadmorská výšky sú 939 a 1750 metrov nad morom. Zistite, pod akým uhlom stúpa lanovka.

*14. Pre ktoré c má rovnica $5\sin x + 12\cos x = c$ aspoň jedno riešenie?

*15. Zisti, pre aké x platí: $\sin x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

2. Finančná matematika I

1. Pán Zlámal si uložil na terminovaný vklad na jeden rok s úrokovou mierou 2,5 % čiastku 8 000 EUR. Akú čiastku vyplatí banka pánovi Zlámalovi po roku?

2. Pán Smoliar si potrebuje súrne vypožičať na jeden rok 3 000 EUR. Banka ponúka úver s úrokovou mierou 15,6 %. Sused Podnikavý je ochotný požičať mu požadovanú čiastku s tým, že každý mesiac pripočíta k dlhu 1,5 % z požičanej čiastky (Pre úplnosť treba uviesť, že pán Podnikavý by mal mať oficiálne oprávnenie k „výpožičnej činnosti“).
   a) Odhadnite, ktorá z možností je pre pána Smoliara výhodnejšia.
   b) Vypočítajte výšku úrokov, ktoré by pán Smoliar zaplatil susedovi Podnikavému a banke, a zistite rozdiel.
   c) Akú najvyššiu „mesačnú percentuálnu prirážku“ by mohol sused Podnikavý požadovať, aby jeho ponuka nebola finančne menej výhodná ako ponuka banky?

3. Klient vložil do banky na termínovaný vklad na pol roka 830 EUR s úrokovou mierou 1,8 %. Po jednom mesiaci však potreboval vložený kapitál vybrať. V podmienkach zmluvy k termínovanému vkladu je uvedené: „*Pri termínovaných vkladoch existuje možnosť predčasného výberu. Vkladu je priradený úrok po zdanení zodpovedajúci dobe uloženia, a ten je znížený na 75 %. Naviac je k tejto zrážke prirátaná sankcia vo výške 0,4 % z vkladu.*“
   a) Koľko eur dostane klient od banky?
   b) Koľko eur by klient dostal od banky, ak by dodržal zmluvné podmienky a nepožiadal o predčasný výber?

4. Pán Smoliar si uložil do banky na termínovaný vklad na 1 rok čiastku 300 000 EUR. Banka na druhý deň potom skrachovala. Aká vysoká je strata pána Smoliara? Zmenila by sa situácia, ak by mal pán Smoliar uložené peniaze v dvoch (troch, štyroch) rôznych bankách? Ak áno, ako?

5. Chceme si založiť bankové konto a ukladať naň od začiatku roka mesačne 100 EUR, a to vždy na začiatku mesiaca. Vieme, že „naša banka“ úročí tento bankový produkt raz ročne, na konci kalendárneho roka. Úroková miera je teraz 2,3 % a predpokladáme, že sa v priebehu roka nebude meniť. Koľko eur by sme mali na bankovom konte k 31.12. po pripísaní zdaneného úroku?

6. Predstavte si, že by ste na bankové konto z predchádzajúcej úlohy uložili na začiatku roka jednorazový vklad 1 200 EUR a potom by ste už žiadne peniaze na konto nevkladali.
   a) Odhadnite, či by celková čiastka na bankovom konte bola k 31.12. vyššia, rovnaká alebo nižšia ako pri mesačných vkladoch 100 EUR. Predpokladáme rovnaké podmienky ako v predchádzajúcej úlohe.
   b) Vypočítajte rozdiel výsledných súm k 31.12.

7. Banka úročí bankové konta do výšky 3 330 EUR úrokovou mierou 2,2 % (úrokovacie obdobie je štvrťročné, úročí sa na konci kalendárnych štvrťročí).
   a) Pán Dlhoprstý si založil 31.3. bankové konto a ukladá naň na začiatku každého štvrťročného obdobia čiastku 50 EUR. Koľko eur bude mať pán Dlhoprstý na konte k dňu 30.9. nasledujúci rok po zúročení bankou? Predpokladajme, že pán Dlhoprstý nebude z konta žiadne peniaze vyberať.
   b) Predstavte si, že by pán Dlhoprstý ukladal peniaze vždy na konci kalendárneho štvrťročného obdobia, prvýkrát 30.6. Koľko korún bude mať v tomto prípade na konte dňa 30.9. nasledujúci rok?

8. Pán Kolumbus si chce ušetriť za 3 roky 2 000 EUR na zahraničný zájazd. Predpokladá, že by vkladal pravidelne raz za štvrťrok čiastky rovnakej výšky. Sporiť začne začiatkom nasledujúceho roka.
   a) Peniaze si bude ukladať doma. Koľko eur bude musieť dať „do prasiatka“ štvrťročne?
   b) Peniaze bude ukladať do banky, ktorá poskytuje úrokovú mieru 3 % a úročí raz ročne, vždy na konci kalendárneho roka. Príslušné čiastky bude nosiť do banky vždy začiatkom štvrťročného obdobia. Koľko eur budú predstavovať štvrťročné vklady v tomto prípade? Výsledok zaokrúhlite na centy.

9*. Banka *Váš sen* ponúka dlhodobý *sporiaci program* s rôznymi variantmi dĺžky doby sporenia a s rôznymi cieľovými čiastkami. Prvých päť rokov je úroková miera 5 %, ďalšie roky 3 %. Predpokladajú sa pravidelné mesačné platby rovnakej výšky, vždy na konci mesiaca, prvýkrát o mesiac po podpísaní zmluvy o sporení. Úrokovacie obdobie je 1 mesiac. Pán Závora si vybral variant „3 333 EUR za 10 rokov“. Koľko eur mesačne bude platiť? (počítajte zvlášť, koľko eur sa naspori z vkladov za prvých päť rokov a koľko z vkladov uložených ďalších päť rokov)

10*. Banka *Rodinná Istota* ponúka dlhodobý sporiaci program pre deti. Pokiaľ budú napríklad rodičia sporiť mesačne 15 EUR od narodenia dieťaťa, dosiahne nasporená čiastka po dovŕšení jeho 18. roku výšku 4 150 EUR. Vypočítajte zodpovedajúcu úrokovú mieru tohto bankového produktu. Predpokladáme, že platby sa realizujú vždy začiatkom mesiaca, úrokovacie obdobie je mesačné, daň z úroku je 19 %. Výsledok zaokrúhlite na desatiny percenta.

3. Štvoruholník

1. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:
   a) rovnobežník je špeciálnym prípadom lichobežníka,
   b) kosoštvorec je špeciálnym prípadom deltoidu,
   c) obdĺžnik je špeciálnym prípadom kosoštvorca,
   d) obdĺžnik je špeciálnym prípadom deltoidu,
   e) deltoid je špeciálnym prípadom lichobežníka,
   f) štvorec je špeciálnym prípadom deltoidu.

2. a) Každému typu útvaru priraďte všetky vlastnosti, ktoré *musí* mať.

Útvar		Vlastnosť	
1	konvexný štvoruholník	A	všetky strany sú rovnako dlhé
2	nekonvexný štvoruholník	B	každé dve protiľahlé strany sú rovnako dlhé
3	deltoid	C	všetky uhly majú zhodnú veľkosť
4	lichobežník	D	každé dva protiľahlé uhly majú zhodnú veľkosť
5	rovnoramenný lichobežník	E	uhlopriečky sú rovnako dlhé
6	rovnobežník	F	uhlopriečky sa rozpoľujú
7	obdĺžnik	G	uhlopriečky sú na seba kolmé
8	kosoštvorec	H	uhlopriečky sú osami uhlov
9	štvorec	I	je stredovo súmerný
		J	je osovo súmerný

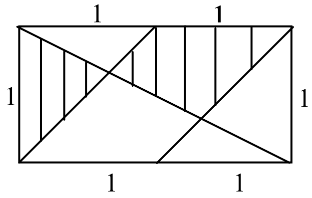
   b) Ktoré vlastnosti *nemôže* mať nekonvexný štvoruholník?

3. Je pravda, že každý štvoruholník
   a) s navzájom kolmými diagonálami je kosoštvorec?
   b) s rovnako dlhými uhlopriečkami je obdĺžnik?
   c) s dvojicou zhodných uhlov je rovnobežník?
   d) s navzájom zhodnými uhlami je obdĺžnik?

4. Rozdeľte štvorec na
   a) dve zhodné časti aspoň tromi spôsobmi
   b) štyri zhodné časti aspoň štyrmi spôsobmi.

5. V štvoruholníku *ABCD* označme dĺžky úsečiek $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$, $|AC| = e, |BD| = f$, veľkosti uhlov $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle CDA| = \delta$, φ – veľkosť uhla zovretého uhlopriečkami, v nech je výška z vrcholu A na stranu CD. Vyjadrite obsah
   a) štvorca *ABCD* pomocou e,
   b) rovnobežníka *ABCD* pomocou a, v,
   c) obdĺžnika *ABCD* pomocou e, φ,
   d) rovnobežníka *ABCD* pomocou b, c, β,
   e) kosoštvorca *ABCD* pomocou e, f,
   f) deltoidu *ABCD* pomocou e, f,
   g) lichobežníka *ABCD* so základňou *AB* pomocou a, c, v,
   h) lichobežníka *ABCD* pomocou $a, b, c, d, \beta, \delta$.

6. Určte obsah vyšrafovanej časti obdĺžnika.



7. Mamička upiekla svojim dvojičkám na narodeniny tortu tvaru kvádra. Vrch poliala čokoládou a ozdobila obdĺžnikom z marcipánu. Ako si majú dvojičky rozdeliť tortu, aby obaja mali rovnako veľa čokolády aj marcipánu? Pozor, smú spraviť iba jeden jediný priamy rez!

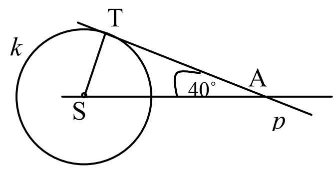
*8. Záhrada má tvar kosoštvorca so stranou dĺžky 100 m. V strede každej strany je bránička. Dokážte, že z ľubovoľného miesta záhrady je k najbližšej bráničke najviac 50m.

*9. Overte platnosť nasledujúceho tvrdenia: Stredy strán ľubovoľného konvexného štvoruholníka sú vrcholmi rovnobežníka s polovičným obsahom oproti pôvodnému.

*10. Na stranách rovnobežníka *ABCD* zvoľme postupne body *K*, *L*, *M*, *N* (na každej strane jeden) tak, že *KLMN* je štvoruholník s dvakrát menším obsahom ako *ABCD*. Ukážte, že aspoň jedna z uhlopriečok štvoruholníka *KLMN* je rovnobežná s niektorou zo strán rovnobežníka.

4. Kružnica

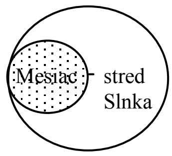
1. a) Priamka p sa dotýka kružnice k v bode T. Koľko stupňov meria uhol TSA?
   b) Zostrojte dotyčnicu z bodu A ku kružnici $k(S,5\text{ cm})$, pričom $|AS| = 12$ cm.
   c) Koľko spoločných dotyčníc môžu mať dve kružnice? Ako by ste ich našli?



2. Tri kružnice s polomermi 2, 3 a 4 sa navzájom zvonka dotýkajú. Vypočítajte obvod trojuholníka, ktorého vrcholy sú stredy týchto kružníc.

3. Na kružnici so stredom S a obvodom 24 je vyznačený oblúk EF o dĺžke 3. Aká je veľkosť menšieho z uhlov ESF?

4. Pri čiastočnom zatmení Slnka nastala situácia znázornená na obrázku (kružnice sa dotýkajú). Aká časť slnečného kotúča bola zakrytá Mesiacom?



5. Do kružnice je vpísaný trojuholník ABC tak, že jeho vrcholy delia kružnicu na tri oblúky, ktorých dĺžky sú v pomere
   a) 4 : 9 : 11,
   b) 1 : 2 : 7.
   Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov tohto trojuholníka.

6. Zostrojte trojuholník ABC, ak je daný uhol $\alpha = 40^\circ$, uhol $\beta = 75^\circ$ a veľkosť polomeru opísanej kružnice trojuholníku ABC je 4 cm.

7. Na kružnici $k(S; r)$ sú dané dva body A, B tak, že menší oblúk AB je štvrtina kružnice k. Na väčšom oblúku AB zostrojte body C, D v poradí A, C, D, B tak, aby uhol $\sphericalangle ADC = 30^\circ$. Vypočítajte veľkosti uhlov trojuholníka ABC.

8. Ivko narysoval kružnicu a vyznačil na nej body A, B, C, D a pospájal ich tak, že dostal konvexný štvoruholník $ABCD$. Mirka sa pozrela na jeho obrázok a povedala mu, že štvoruholník okolo ktorého sa dá opísať kružnica, sa volá tetivový. Ivko sa chcel dozvedieť o týchto štvoruholníkoch viac, Mirka mu však len poradila, aby zistil súčet veľkostí protiľahlých uhlov v svojom štvoruholníku. Ivko si nakreslil tetivu AC a uvedomil si, že ako $\sphericalangle ADC$ tak aj uhol $\sphericalangle ABC$ sú obvodové uhly nad tetivou AC (pozor, rôzne!). Teraz už ľahko odhalil vlastnosť, ktorú mala Mirka na mysli. Podarí sa to aj vám?

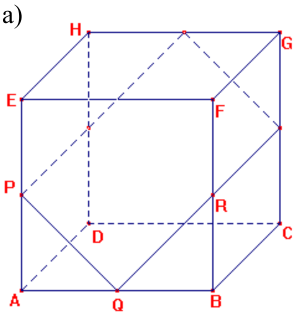
*9. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nad priemermi AB a AC sú zostrojené kružnice. Tieto kružnice sa pretínajú v bode A a ich druhý priesečník leží vo vnútri strany BC. Dokážte!

*10. Dané sú kružnice k_1 a k_2, ktoré majú vonkajší dotyk v bode T. Týmto bodom sú vedené dve priamky a, b tak, aby boli sečnicami oboch kružníc. Označme A, B priesečníky (rôzne od A) priamky a s kružnicami k_1 a k_2 a C, D priesečníky (rôzne od A) priamky b s kružnicami k_1 a k_2. Dokážte, že AC je rovnobežná s BD.

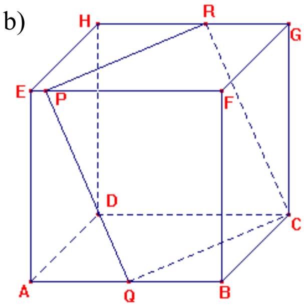
5. Stereometria I

1. Šárke pri rezaní kocky $A..H$ a ihlanu A..E rovinou PQR vyšli nasledujúce obrázky. Nájdite medzi nimi zlé a chyby odôvodnite a opravte.

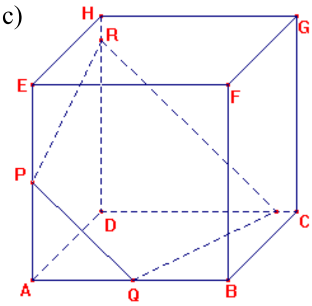
a)



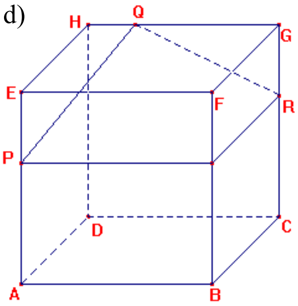
b)



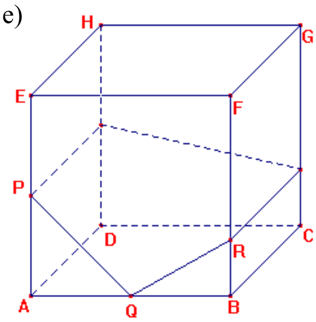
c)



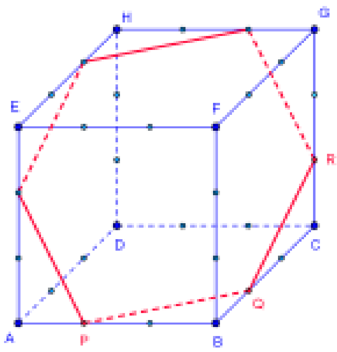
d)



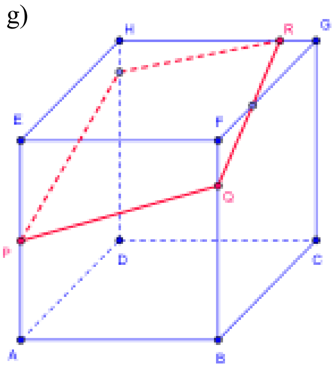
e)



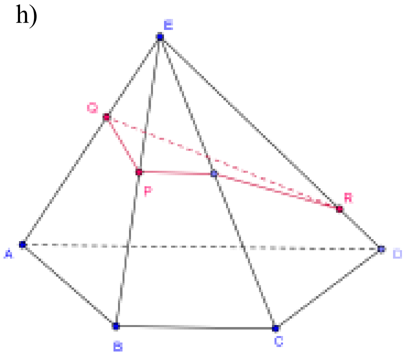
f)



g)



h)



2. Ivan s Marekom chceli na základe postupu konštrukcie, ktorý si napísali na hodine matematiky do zošita, zrekonštruovať rez kocky $A..H$ rovinou PQR. Skúste to aj vy.
   1. PQ
   2. QR
   3. p; $p \parallel QR \wedge P \in p$
   4. S; $S \in p \cap EH$
   5. SR
   6. rez $PQRS$

   Stále sa im to nedarilo, tak si požičali ešte Vierkin zošit a tam našli aj „dôvodenie“, ktoré pani učiteľka iba hovorila, ale nepísala.

1. PQ

$$\left.\begin{aligned} P \in AE \Rightarrow P \in \overleftrightarrow{ABE} \\ Q \in BF \Rightarrow Q \in \overleftrightarrow{ABE} \end{aligned}\right\} P, Q \in \overleftrightarrow{ABE} \Rightarrow PQ \subset \overleftrightarrow{ABE}$$

2. QR

$$\left.\begin{aligned} Q \in BF \Rightarrow Q \in \overleftrightarrow{BFG} \\ R \in FG \Rightarrow R \in \overleftrightarrow{BFG} \end{aligned}\right\} Q, R \in \overleftrightarrow{BFG} \Rightarrow QR \subset \overleftrightarrow{BFG}$$

3. p; $p \parallel QR \wedge P \in p$

$$\left.\begin{aligned} P \in AE \Rightarrow P \in \overleftrightarrow{AEH} \\ QR \subset \overleftrightarrow{BFG} \\ \overleftrightarrow{AEH} \parallel \overleftrightarrow{BFG} \end{aligned}\right\} \overleftrightarrow{PQR} \cap \overleftrightarrow{BFG} \parallel \overleftrightarrow{PQR} \cap \overleftrightarrow{AEH} \equiv p$$

4. S; $S \in p \cap EH$

$$p \subset \overleftrightarrow{AEH} \Rightarrow \exists p \cap \overleftrightarrow{EH}$$

5. SR

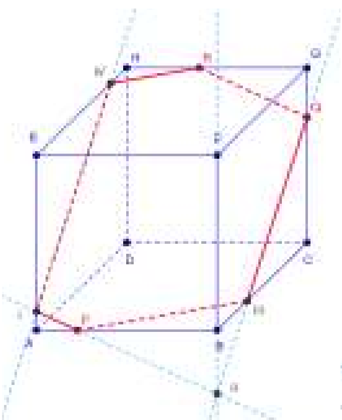
$$\left.\begin{aligned} S \in HE \Rightarrow S \in \overleftrightarrow{EHG} \\ R \in FG \Rightarrow R \in \overleftrightarrow{EFG} \\ \overleftrightarrow{EHG} \equiv \overleftrightarrow{EFG} \end{aligned}\right\} SR \subset \overleftrightarrow{EFG}$$

6. rez $PQRS$

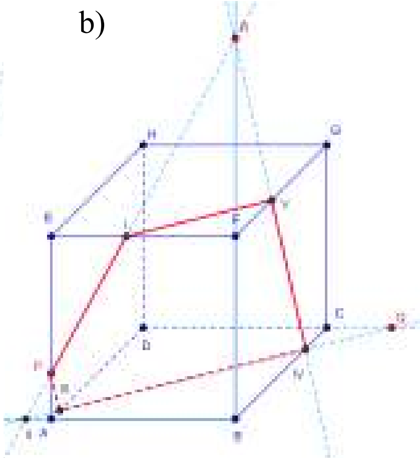
Skúste teraz opäť rez zrekonštruovať.

3. Pri tvorbe rezu kocky $A..H$ rovinou PQR „vyrobil“ Jožo takýto obrázok. Body čísloval tak, ako vznikali od I po VI. Napíšte postup Jožovej konštrukcie a dopíšte aj dôvodenie.

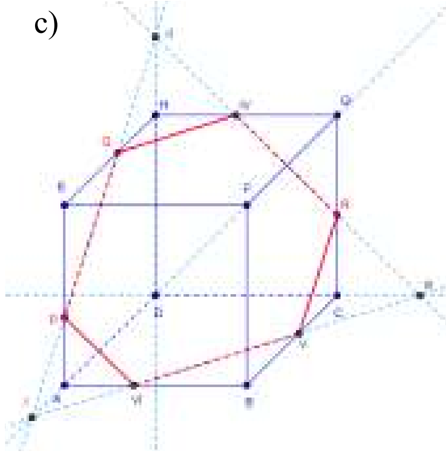
a)



b)

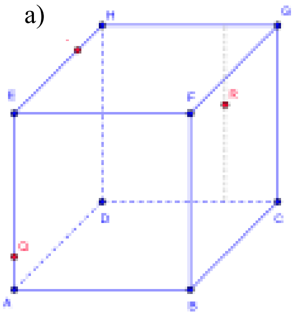


c)

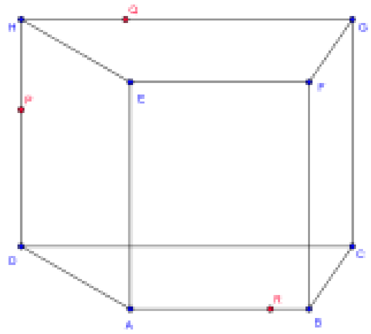


4. Zostrojte rezy telies rovinou určenou bodmi P, Q, R.

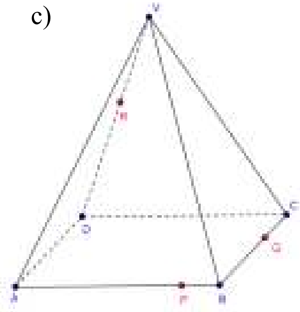
a)



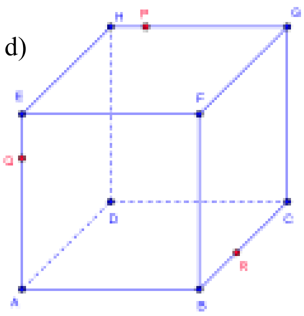
b)



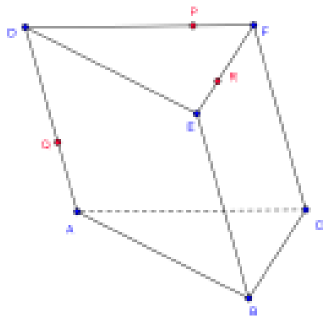
c)



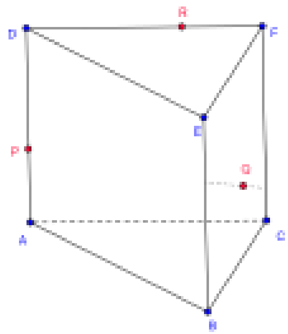
d)



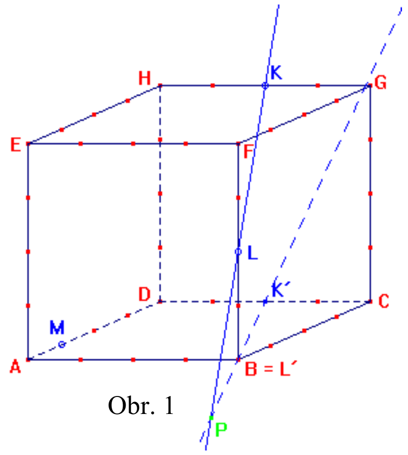
e)



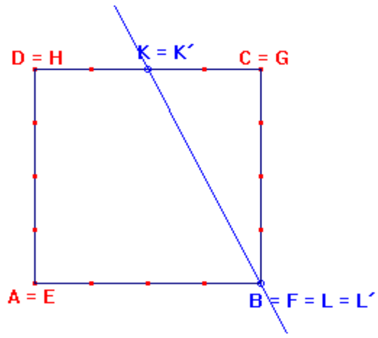
f)



5. Julka a Lukáš hľadali na kocke *A..H* s hranou dĺžky 4 priesečník priamky *KL* s rovinou *ABC*. Každý mal iný postup. Julka postupovala tak, ako je to znázornené na obrázkoch 1 a 2. Vysvetli jej postup.

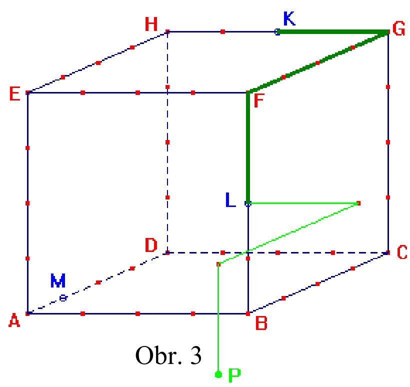


Obr. 1



Obr. 2

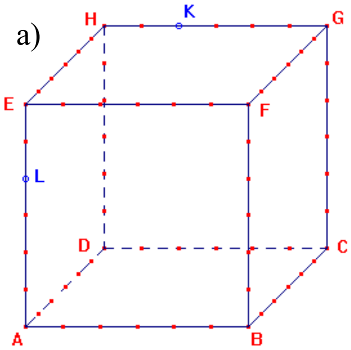
Lukáš mal na to fintu. Na obrázku A7c) je jeho výmysel. Skús ho vysvetliť.



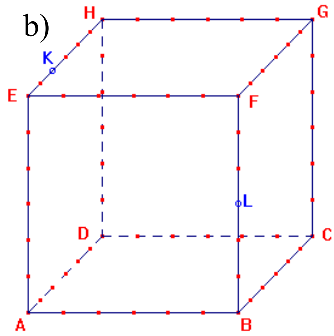
Obr. 3

6. Zostroj prienik priamky *KL* s rovinou *ABC* Lukášovým aj Julkiným spôsobom. V ktorých prípadoch sa nedal Lukášov postup použiť? Prečo?

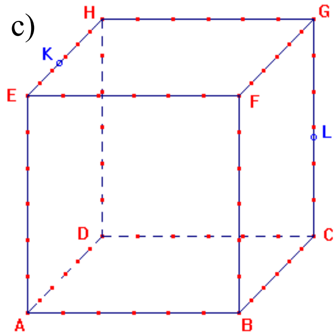
a)



b)

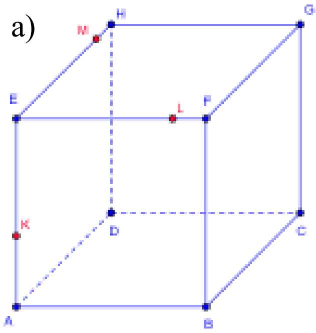


c)

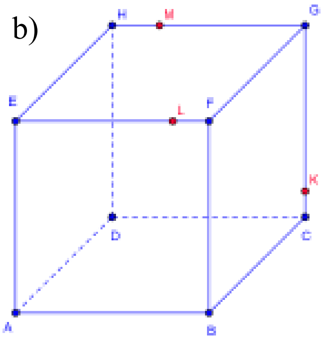


7. Zostrojte skutočnú veľkosť rezu telesa rovinou *KLM*.

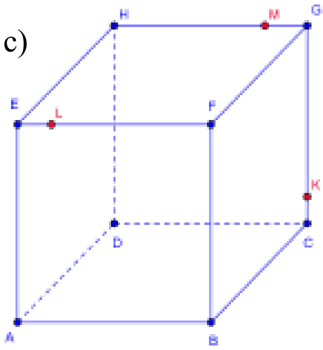
a)



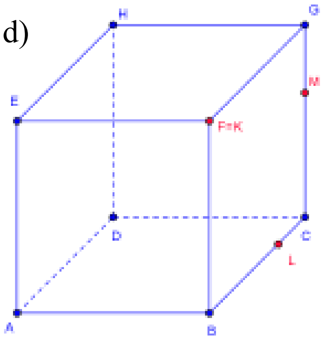
b)



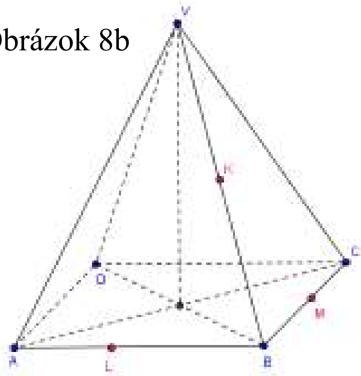
c)



d)



Obrázok 8b

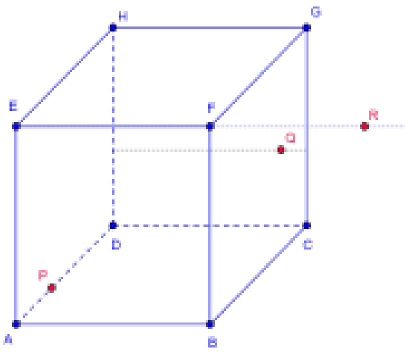


8. Vypočítajte obsah rezu telesa rovinou *KLM* z úlohy 7b a ihlanu z obrázku 8b, ak pre jednotlivé obrázky platí:

7b) $|AB| = 8$ cm, $|LF| = 3$ cm, $|GK| = |MG| = 5$ cm.

8b) $|AB| = 3\sqrt{2}$ cm, $|LB| = |MB| = 2\sqrt{2}$ cm, $|KB| = \dfrac{10}{3}$ cm, výška ihlana $v = 6$ cm.

9*. Zostrojte rez kocky rovinou určenou bodmi P, Q



10*. Zostrojte rez pravidelného osemstena *ABCDEF* rovinou *PQR*. Bod *P* je stred strany *AB*, bod *Q* je ťažisko trojuholníka *CDE* a bod *R* je v strede hrany *FC*.

11*. Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana *ABCDV* rovinou *PQR*. $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 5\ cm$, $|AV| = 7\ cm.$ Bod *P* je ťažisko trojuholníka *ABV*, bod *Q* je stred kružnice vpísanej štvorcu *ABCD* a bod *R* je stred kružnice opísanej trojuholníku *ADV*.

6. Kombinatorika III

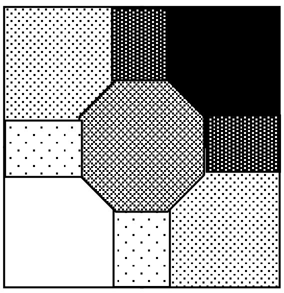
1. Do tanečnej školy chodí 23 dievčat a 39 chlapcov. Každú sobotu sa koná tanečná súťaž na ktorej sa žiaden tanečný pár nesmie zúčastniť viac ako raz (t.j. jednu sobotu). Koľko týždňov sa bude môcť uvedená tanečná škola zúčastňovať súťaží, ak vždy vyšle na súťaž len jeden pár?

2. Minulý týždeň podal Slávo 10 miliónov rôzne vyplnených tiketov Športky. Je isté, že získa prvú cenu? (V Športke sa vyberá 6 zo 49 čísel a vyhrať prvú cenu znamená uhádnuť všetkých šesť.)

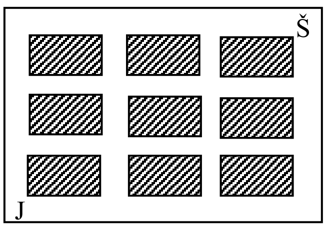
3. Martina si nakreslila šachovnicu 8x8 a na každé jej políčko napísala, koľko rôznych ťahov koňom sa z neho dá spraviť (napr. v pravom dolnom rohu má číslo 2). Zistite súčet všetkých čísel napísaných na Martininej šachovnici.

4. a) Slavove obľúbené číslo je 5. Preto zakaždým, keď si podá Športku, ako jedno zo šiestich čísel tipuje práve 5. Najviac koľko rôznych tiketov môže vyplniť?
   b) Koľko rôznych tiketov môže vyplniť, ak okrem päťky tipuje vždy aj šestku?
   (V Športke sa vyberá 6 zo 49 čísel a vyhrať prvú cenu znamená uhádnuť všetkých šesť.)

5. Po hracej doske, ktorú vidíte na obrázku, sa pohybuje panáčik. V každom kroku sa môže posunúť len na susedné tmavšie políčko. Koľkými spôsobmi sa môže dostať z bieleho políčka na čierne?



6. Na obrázku je nakreslený plán sídliska, vyšrafované políčka sú bloky domov. Koľkými spôsobmi sa môže Janka dostať do školy, keď na každej križovatke môže odbočiť len vpravo alebo hore?



7. Nachádza sa v Pascalovom trojuholníku číslo
   a) 10
   b) 21?
   Koľkokrát? V ktorom riadku?

8. Pozrite si dobre Pascalov trojuholník a potom doplňte v nasledujúcich rovnostiach chýbajúce čísla tak, aby platilo:

c) $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{\ }$

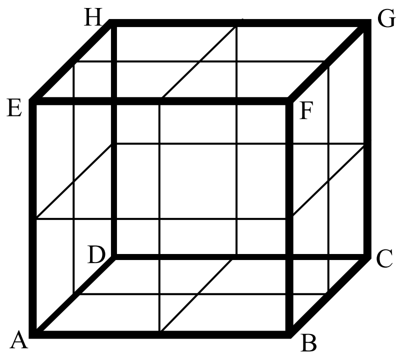
d) $\binom{6}{4}+\binom{\ }{3}=\binom{\ }{4}$

e) $\binom{\ }{5}+\binom{6}{\ }=\binom{\ }{6}$

f) $\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{k}=\binom{m+1}{k+1}$

9. Máme štvorcovú sieť. V nej sú zakreslené body A, B so súradnicami $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$. Koľkými spôsobmi sa možno dostať z bodu A do bodu B, ak pohyby sú povolené len po priamkach siete a cesta má byť najkratšia možná?

10. Pavúk Hubert pospájal vláknami stredy hrán drôteného modelu kocky ABCDEFGH tak, ako vidíte na obrázku. Teraz sa chce dostať čo najkratšou cestou z vrcholu A do vrcholu G. Koľko rôznych ciest má na výber? (Smie liezť len po hranách modelu a natiahnutých vláknach)



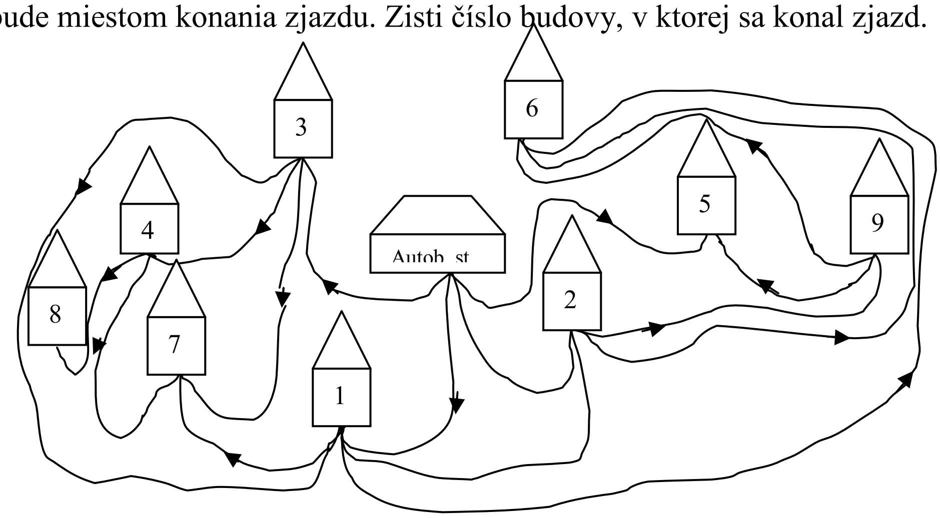
*11. Riešte rovnice:

a) $\binom{n^2-2}{2}+\binom{n^2-2}{n^2-4}=2$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}-2\binom{n}{n-2}=\frac{n^2+3n}{2}$

*12. V ľavom hornom rohu šachovnice 5×5 stojí figúrka. Naším cieľom je dostať ju do pravého dolného rohu, pričom povolené sú len posuny v naznačených smeroch. Ktoré políčko treba "zakázať", aby sa uvedená úloha dala splniť čo najmenej rôznymi spôsobmi?

*13. Vo Veľkých Premýšľanoch sa konal medzinárodný zjazd matematikov. Organizátori poskytli účastníkom takúto mapku a potešili ich, že ak dodržia naznačené smery chôdze, majú 10%-nú šancu, že budova, do ktorej náhodne vojdú, bude miestom konania zjazdu. Zisti číslo budovy, v ktorej sa konal zjazd.



7. Pravdepodobnosť II

1. Aká je pravdepodobnosť, že všetky čísla vyžrebované v športke budú prvočísla? (V Športke sa žrebuje 6 čísel zo 49.)

2. S akou pravdepodobnosťou súčin dvoch náhodne zvolených prirodzených čísel končí číslicou päť?

3. V klobúku máme 100 lístočkov s číslami 1, 2, 3, …, 100.
   a) Koľko najmenej lístočkov musíme vytiahnuť, aby sme mali istotu, že medzi nimi sú dva také, že ciferný súčet čísel na nich napísaných je rôzny?
   b) Vytiahli sme desať lístočkov. Aká je pravdepodobnosť, že je medzi nimi lístok s číslom 1?
   c) Koľko najmenej lístočkov treba vytiahnuť, aby pravdepodobnosť toho, že je medzi nimi číslo menšie ako 51, bola aspoň 0,5?

4. V klobúku máme tieto štyri lístočky $\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{P}$, $\boxed{R}$. Postupne sme ich po jednom vyberali. Aká je pravdepodobnosť, že sme ich vytiahli v poradí PARA?

5. V triede je 30 žiakov a traja nemajú domácu úlohu. Učiteľ kontroluje úlohy vždy piatim žiakom. Aká je pravdepodobnosť, že
   a) neobjaví žiadneho žiaka bez úlohy
   b) objaví všetkých, ktorí nemajú úlohu?

6. Z bridžových kariet (polovica žolíkových, ale bez žolíkov, teda 4x13 kariet) vyberieme tri karty. Aká je pravdepodobnosť, že to budú 2, 9, eso ?
   a) Z bridžových kariet vyberieme tri karty. Aká je pravdepodobnosť, že to budú trojka a dvaja dolníci?
   b) Z bridžových kariet vyberieme päť kariet. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú všetky esá?

7. Zo sedmových kariet vyberieme 3 karty. Aká je pravdepodobnosť, že
   a) medzi nimi nebude eso
   b) medzi nimi bude sedmička
   c) všetky budú červené
   d) všetky budú rovnakej farby
   e) všetky budú rovnakej výšky
   f) každá bude inej farby?

8. V urne sú 3 biele a 5 čiernych guličiek. Po jednej ich vyberáme a nevkladáme ich späť. Aká je pravdepodobnosť, že:
   a) ako prvú vytiahneme bielu guličku
   b) ako poslednú vytiahneme čiernu guličku
   c) pred niektorou bielou vytiahneme čiernu guličku
   d) pred prvou čiernou guličkou vytiahneme bielu guličku?

9. Janka má 102 papierikov. Na každom papieriku je napísaný jeden príklad. Každý príklad je napísaný na 3 rôznych papierikoch. Aká je pravdepodobnosť, že
   a) príklad, ktorý hľadá, vytiahne na prvý pokus
   b) príklad, ktorý hľadá, vytiahne na tretí pokus
   c) keď vytiahne dva papieriky, na oboch bude ten istý príklad
   d) na štyroch vybratých papierikoch budú rôzne príklady?

10. Na tikete Keno10 môžem vybrať 10 čísel z 80. Pri žrebovaní sa náhodne vyberie 20 z týchto 80 čísel. Prvú cenu vyhrám, ak všetkých 10 mnou tipovaných čísel je medzi 20-timi vyžrebovanými. Aká je pravdepodobnosť, že vyhrám prvú cenu v hre Keno10?

11. Podľa lekárov má dospelý človek nadváhu, ak platí $\frac{\text{hmotnosť človeka v kg}}{(\text{výška človeka v metroch})^2} > 25$. Viete, že Karol meria 176 cm a váži medzi 70 a 100 kg. Aká je pravdepodobnosť, že má Karol nadváhu?

*12. Šaňo a Iva sa dohodli, že sa stretnú medzi 13^{00} a 14^{00}. Šaňo je ochotný čakať na Ivu 10 minút, Iva na Šaňa počká najviac 15 minút. Spoločne sa snažia zistiť, aká je pravdepodobnosť toho, že sa naozaj stretnú. Šaňo povie: "Ak ja prídem 13^{25}, tak sa spolu stretneme, ak ty prídeš medzi 13^{10} a 13^{35}". Iva na to povie: "Máš pravdu, ak ty prídeš v čase x a ja v čase y, tak sa stretneme, ak $x - 15\,\text{minút} \le y \le x + 10\,\text{minút}$". Šaňo pokračuje: "Ak si to nakreslíme do súradnicovej sústavy, pričom môj čas príchodu budeme značiť na x-ovú os (vieme že prídem medzi 13^{00} a 14^{00}) a tvoj na y-ovú os (aj ty prídeš medzi 13^{00} a 14^{00}), vieme povedať, že sa stretneme, ak platí tvoja nerovnosť". Iva už potom iba spočítala obsahy obrazcov (možné príchody tvoria štvorec...), vydelila ich a dostala výslednú pravdepodobnosť. Vypočítajte ju aj vy.

*13. Duelanti Alexander a Boris na seba striedavo strieľajú, až kým jeden z nich nezasiahne súpera. Alexander trafí s pravdepodobnosťou 0,6 a Boris s pravdepodobnosťou 0,8. Aká je pravdepodobnosť, že Alexander nebude zasiahnutý?

*14. Predstavte si, že máte podlahu rozdelenú rovnobežnými čiarami na obdĺžniky široké 10 cm a hádžete na ňu ihlu dlhú 5 cm (ihla sa pri dopade nezapichne). S akou pravdepodobnosťou ihla pretne niektorú z čiar?

*15. Predpokladajme, že koeficienty kvadratickej rovnice $x^2 + px + q = 0$ vyhovujú podmienkam $|p| \le 1$, $|q| \le 1$ a sú rovnako pravdepodobné. Určte pravdepodobnosť toho, že korene tejto rovnice sú reálne čísla.

*16. Kráľ ponúkol odsúdencovi na smrť nasledujúcu možnosť. Dostane 6 zelených a 6 červených guličiek, tieto má odsúdenec podľa vlastného uváženia rozdeliť do dvoch rovnakých urien (musí použiť všetky guličky). Kráľ si potom náhodne vyberie urnu a kat z nej vyberie jednu guličku. Ak bude táto zelená, dostane milosť, inak bude popravený. Poraďte odsúdencovi, ako má rozdeliť guličky.

8. Štatistika I

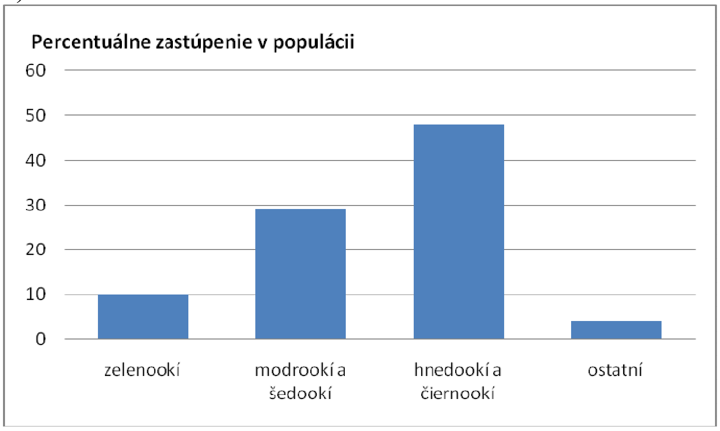
1. V nasledujúcej tabuľke sú údaje o účastníčkach finále MISS Slovensko v predchádzajúcom roku.
    a) Určte rozsah štatistického súboru
    b) Koľko štatistických znakov sa sleduje na prvkoch základného súboru?
    c) Ktoré zo štatistických znakov sledovaných na prvkoch základného súboru sú kvantitatívne a ktoré kvalitatívne?
    d) U kvantitatívnych znakov zistite priemernú hodnotu.
    e) Vytvorte tabuľku početností a relatívnych početností prvkov základného súboru podľa veku, výšky, obvodu pása.

p.č.	Vek	Znamenie	Výška v cm	Obvod hrudníka v cm	Obvod pása v cm	Obvod bokov v cm
1	19	Rak	170	92	60	90
2	18	Rak	171	88	61	90
3	19	Blíženci	172	86	59	91
4	18	Strelec	173	87	61	92
5	23	Ryby	173	89	62	90
6	21	Váhy	174	87	58	91
7	18	Škorpión	174	85	58	89
8	21	Blíženci	175	88	61	92
9	19	Panna	175	86	59	89
10	18	Rak	176	90	60	90
11	20	Rak	176	86	61	92
12	23	Škorpión	178	84	62	92

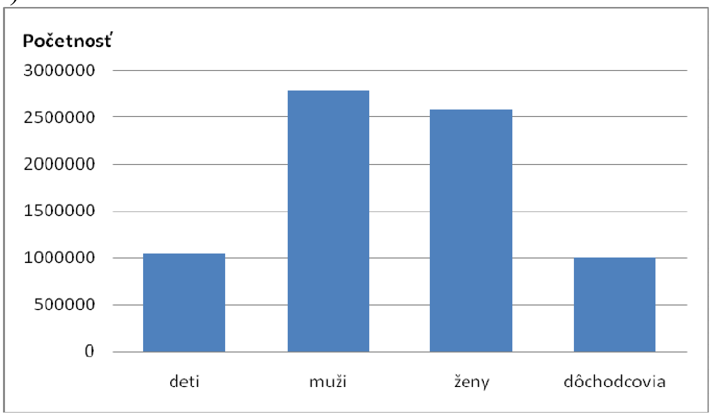
2. Ústav pre výskum verejnej mienky skúmal reakcie občanov Slovenska na správy o výskyte BSE v zahraničí. Zistil, že 30% z opýtaných naďalej konzumuje hovädzie mäso v rovnakej miere ako predtým, 35% jeho spotrebu znížilo, 20% ho prestalo konzumovať celkom, 14% ho nekonzumovalo a nekonzumuje, 1% uviedlo inú odpoveď. Prezentujte tieto výsledky pomocou histogramu.

3. Včera kontrolovali revízori cestovné lístky cestujúcim v MHD a v jednotlivých autobusoch postupne natrafili na1, 3, 2, 4, 2, 5, 3, 3, 4, 0, 3, 2, 7, 1, 4, 5, 2, 6, 3, 4 čiernych pasažierov.
    a) Zostavte tabuľku rozdelenia početností pre počty čiernych pasažierov v jednotlivých autobusoch
    b) Zistite, koľko čiernych pasažierov pripadá priemerne na jeden kontrolovaný autobus.

4. Nasledujúce histogramy nie sú v poriadku. Vysvetlite prečo.
   a)



   b)



5. Igor mal po 9 hrách priemerné skóre 12,8 bodu. V desiatej hre získal 16 bodov. Aké je jeho nové priemerné skóre po desiatej hre?

6. V baliarňach kontrolovali váhu 80 balíčkov búrskych orieškov. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené namerané hodnoty. Zistite priemernú váhu orieškov v týchto balíčkoch a smerodajnú odchýlku.

Váha	Počet balíčkov
$80 \le h < 85$	5
$85 \le h < 90$	10
$90 \le h < 95$	15
$95 \le h < 100$	26
$100 \le h < 105$	13
$105 \le h < 110$	7
$110 \le h < 115$	4

7. Zo štvrťročnej písomnej práce z matematiky žiaci získali nasledovný počet bodov: 11, 8, 7, 10, 10, 6, 10, 12, 6, 9, 8, 8, 9, 10, 11, 10, 9, 9, 7, 11, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 9, 12, 9, 5. Zostavte frekvenčnú tabuľku a zistite hodnotu mediánu, modusu a smerodajnej odchýlky. O čom tieto hodnoty svedčia?

8. Dvaja poľovníci Lišiak a Srnčík strieľali na terč. Ktorý z nich bol presnejší?

Lišiak	9	8	8	8	7
Srnčík	10	10	8	7	5

9. V marci vymeškali študenti nasledujúci počet hodín:

Dievčatá	2	0	6	10	2	2	4	2	5	2
Chlapci	4	4	0	2	10	2	6	2	3	10

Porovnajte variabilitu oboch štatistických súborov.

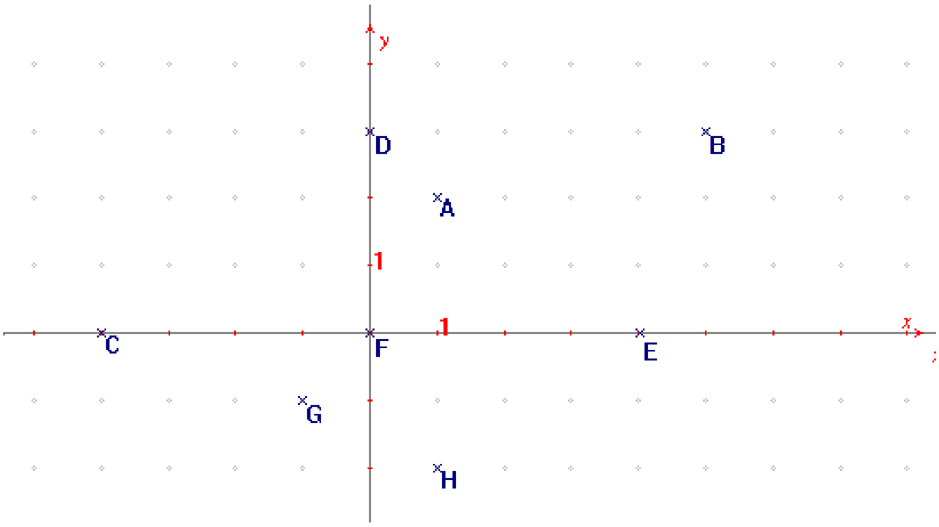
10. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené známky z matematiky na konci 1. a 2. ročníka. Vypočítajte koeficient korelácie, výsledok interpretujte.

1r. / 2r.	**1**	**2**	**3**	**4**
1	3	1		
2	2	6	5	
3		7	8	
4			2	1

11*. Určite interval, v ktorom sa s pravdepodobnosťou 68% sa nachádza skutočná hmotnosť ozubeného kolieska. Pri viacnásobnom vážení kolieska boli získané nasledujúce hmotnosti (v gramoch): M = {324; 330; 327; 319; 334; 304}

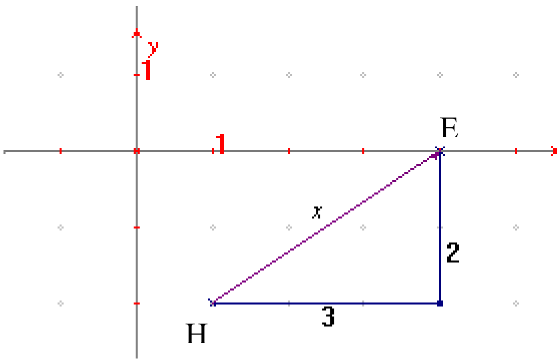
9. Analytická geometria I

1. Určte súradnice
   a) bodov *A, D, F, G*
   b) vektorov $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{GH}$



   c) Nájdite aspoň 7 bodov, ktorých vzdialenosť od bodu *A* je 5.
   d) Napíšte analytické vyjadrenie úsečky *GH*, priamky *GH*, polpriamky *GH*, polpriamky opačnej k polpriamke *GH*.
   e) Vypočítajte: $5.\overrightarrow{FB}, -2.\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GF}.\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{FD}$

2. Harry, Ron a Hermiona počítali veľkosť $\overrightarrow{HE}$ z úlohy 1. Každý to mal ináč:
   Harry: $x = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$



   Ron: $\left|\overrightarrow{HE}\right| = \sqrt{(4-1)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{13}$

   Hermiona: $\left|\overrightarrow{HE}\right| = \sqrt{\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HE}} = \sqrt{3.3 + 2.2} = \sqrt{13}$

   Vysvetlite ich postupy a správnosť (nesprávnosť) týchto postupov.

3. Nech $|\vec{u}| = 13$, $|\vec{v}| = 19$ a $|\vec{u} + \vec{v}| = 24$. Vypočítajte
   a) $|\vec{u} - \vec{v}|$,
   b) uhol vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

4. Určte vzájomnú polohu priamok *a, b*.
   a) $a: 3x - 2y + 10 = 0; \quad b: 5x + y - 13 = 0$,
   b) $a: 3x - 2y + 10 = 0; \quad b: -x + \frac{2}{3}y - 13 = 0$,
   c) $a: 3x - 2y + 10 = 0; \quad b: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 8 + 6t \end{cases} t \in R$

5. Napíšte analytické vyjadrenie úsečky *KL*, ak $K[1;5]$ a *L* je priesečníkom priamok *p, q*.
   $p: \begin{matrix} x = 1 - t \\ y = 3 + t \end{matrix} \quad t \in R \qquad q: 6x - y - 3 = 0$

6. Vypočítajte vzdialenosť bodu *P* od priamky *p*.
   $P[0;11]$ a $p \begin{cases} x = 2 + 5s \\ y = 1 - 12s \end{cases} s \in R$

7. Vypočítajte súradnice stredov strán a ťažiska trojuholníka *ABC*, ak je dané:
   $A[4;3], \quad \overrightarrow{BA} = (2;-6), \quad C \in p \cap q, \quad p: \begin{matrix} x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \end{matrix} t \in R \quad q: \begin{matrix} x = 8 + s \\ y = 3 - 6s \end{matrix} s \in R$.

8. V rovnoramennom trojuholníku *ABC* so základňou *AB* má bod *A* súradnice $[-6;-2]$, bod $D[-2;-2]$ je stredom základne a priesečník výšok *O* má súradnice $[-2;0]$. Určte súradnice bodov *B* a *C*.

9. Vypočítajte obsah trojuholníka *KLM*, ak viete: $K[1;3], L[9;-3], M[8;4]$.

10*. Bodom $M[6;3]$ veďte priamku tak, aby s priamkami $3x + y - 6 = 0$ a $x - 3y + 8 = 0$ určovala rovnoramenný trojuholník .

11*. V rovnostrannom trojuholníku *KLM* poznáme: $S_{KL}[2;8], t_m: y = 8$, $X \in v_k \wedge X[2 + \sqrt{3};11]$. Vypočítajte súradnice jeho vrcholov.

12*. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom *P* a má od bodu *Q* vzdialenosť *v*.
   a) $P[-4;-3], Q[0;0], v = 3$,
   b) $P[-2;5], Q[3;5], v = \sqrt{5}$.

13*. Určte množinu bodov, ktorých vzdialenosti od bodov $M[5;7], N[-4;-5]$ sú v pomere 3:2.